积分因子及其应用

陈吉美

（国防科学技术大学 理学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：在介绍了恰当方程与积分因子的概念以及相关定理的基础上，通过对积分因子的研究，给出了一类微分不等式的证明，并给出了Picard定理唯一性的另一种证明方法。

关键词：恰当方程；积分因子；不等式

中图分类号：O175.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0013-02

Integrating Factors and Its Applications

Chen Jimei

（School of Science，National Uuiversity of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract: Based on introduction of the concepts and related theorem of exact equations and integrating factors, through a study of integrating factors, proves a class of differential inequalities and presents a new uniqueness proof for Picard's theorem.

Keywords: exact equation; integrating factor; inequality

积分因子是一阶微分方程的重点与难点[1-5]，如果能够灵活运用积分因子，就会求解一类非恰当方程。本文讨论积分因子的另外2种应用与积分因子的概念。

1　恰当方程的概念与判定

若将一阶显式微分方程写成微分形式

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0, \tag{1}$$

此形式称为一阶对称形式的微分方程。

如果对称形式的方程（1）的左端恰好是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，则称该方程为恰当方程。

定理1　假设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在某区域内连续可微，则方程（1）是恰当方程的充分必要条件是在此区域内恒有$\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}$成立。

2　积分因子

如果对于方程（1）在某区域内$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，此时方程（1）就称为非恰当方程。对于非恰当方程，如果存在某连续可微的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$为恰当方程，则称$\mu(x,y)$为方程（1）的1个积分因子。

定理2　函数$\mu(x,y)$是方程（1）的积分因子的充分必要条件是$\mu(x,y)$满足一阶偏微分方程：

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu。$$

定理3　1）方程（1）有只与x有关的积分因子的充分必要条件是：

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x),$$

此时，积分因子为$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$。

2）方程（1）有只与y有关的积分因子的充分必要条件是：$\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)=\psi(y)$，

收稿日期：2009-08-21

通信作者：陈吉美（1963-），男，湖南汉寿人，国防科学技术大学副教授，主要从事微分动力系统方面的教学与研究，E-mail：cjm8888888@yahoo.com.cn

此时，积分因子为：

$\mu(y)=e^{\int p(y)dy}$。

3 积分因子的应用

3.1 证明微分不等式

定理4 设函数$y=\varphi(x)$满足如下微分不等式：

$$y'+a(x)y\le 0\quad (x\ge 0)，\tag{2}$$

则$\varphi(x)\le\varphi(0)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)\quad (x\ge 0)$。（3）

证明 由定理的条件知：

$$\varphi'(x)+a(x)\varphi(x)\le 0\quad (x\ge 0)。\tag{4}$$

由定理3知，函数$\mu(x)=\exp\left(\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)$为式（4）左边的1个积分因子，因此

$$\exp\left(\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)\left(\varphi'(x)+a(x)\varphi(x)\right)\le 0\quad (x\ge 0)，$$

即$\left[\varphi(x)\exp\left(\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)\right]'\le 0\quad (x\ge 0)$。

两边从0到x作积分得

$$\varphi(x)\exp\left(\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)-\varphi(0)\le 0\quad (x\ge 0)。$$

故$\varphi(x)\le\varphi(0)\exp\left(-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right)\quad (x\ge 0)$，

即式（3）成立。

3.2 证明Gronwall不等式及Picard定理的唯一性

定理5 设K为非负常数，$f(t)$和$g(t)$为在区间$\alpha\le t\le\beta$上的连续非负函数，且满足不等式

$$f(t)\le K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\quad (\alpha\le t\le\beta)，\tag{5}$$

则有$f(t)\le K\exp\left(\int_\alpha^\beta g(s)\mathrm{d}s\right)\quad (\alpha\le t\le\beta)$。（6）

证明 设$\omega(t)=K+\int_\alpha^t f(s)g(s)\mathrm{d}s\quad (\alpha\le t\le\beta)$，注意到$\omega(0)=K$，则有

$$\omega'(t)=f(t)g(t)\le g(t)\omega(t)，$$

即$\omega'(t)-g(t)\omega(t)\le 0$。（7）

由定理3知，函数$\mu(t)=\exp\left(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right)$为式（7）左边的1个积分因子，

因此$\exp\left(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right)\left[\omega'(t)-g(t)\omega(t)\right]\le 0$。

即$\left[\omega(t)\exp\left(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right)\right]'<0$。

两边从0到t作积分得：

$$\omega(t)\exp\left(-\int_\alpha^t g(s)\mathrm{d}s\right)-\omega(0)\le 0。$$

故$f(t)\le K\exp\left(\int_\alpha^\beta g(s)\mathrm{d}s\right)\quad (\alpha\le t\le\beta)$。

定理6（Picard定理） 如果$f(x,y)$在$R:|x-x_0|<a,\ |y-y_0|<a$上连续，且关于y满足利普希兹条件，则方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)-y_0\end{cases}\tag{8}$$

存在唯一的连续解$y=\varphi(x)$，定义在区间$[x_0-h,x_0+h]$，且满足初始条件，这里

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right),\ M>\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|。$$

证明（定理6的唯一性部分） 设$y=\varphi(x)$和$y=\psi(x)$都为式（8）的解，则：

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s，$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\psi(s))\mathrm{d}s。$$

因此

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\int_{x_0}^x|f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|\mathrm{d}s<$$

$$L\int_{x_0}^x|\varphi(s)-\psi(s)|\,\mathrm{d}s。$$

在定理5中，取K=0，得$0<|\varphi(x)-\psi(x)|<0$，故$\varphi(x)\equiv\psi(x)$。

定理6的其它部分的证明本文从略。

参考文献：

[1] 丁同仁，李承治. 常微分方程[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2004：1-98.
Ding Tongren，Li Chengzhi. Ordinary Differential Equations [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press，2004：1-98.

[2] 中山大学数学力学系常微分方程组. 常微分方程[M]. 北京：人民教育出版社，1978：1-58.
Differential Equation Group, School of Mathematics & Computational Science at Sun Yat-Sen University. Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Peoples' Education Press，1978：1-58.

[3] 叶彦谦. 常微分方程讲义[M]. 北京：人民教育出版社，1982：1-190.
Ye Yanqian. Lecture Notes on Ordinary Differential Equation [M]. Beijing: Peoples' Education Press，1982：1-190.

[4] M 布朗. 常微分方程及其应用[M]. 张鸿林，译. 北京：人民教育出版社，1982：1-226.
Brown M. Ordinary Differential Equations and Its Applications [M]. Zhang Honglin，Translator. Beijing: Peoples' Education Press，1982：1-226.

[5] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，1982：1-120.
Ma Zhien, Zhou Yichuang. Ordinary Differential Equation and Stability Method[M]. Beijing: Science Press，1982：1-226.

（责任编辑：廖友媛）