第24卷第2期 湖南工业大学学报 Vol.24 No.2
2010年3月 Journal of Hunan University of Technology Mar. 2010

向量值多线性交换子极大算子的加权估计

黄 政[1,2]，黄爱武[1]

（1. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院，湖南 长沙 410081；
2. 吉首大学师范学院 数学与计算机科学系，湖南 吉首 416000）

摘 要：利用sharp极大估计给出了向量值极大算子的多线性交换子加权估计。由此可将极大算子的多线性交换子延拓为向量值加权的Lebesgue空间上的有界算子。

关键词：极大函数；交换子；加权Lebesgue空间；BMO空间

中图分类号：O177.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2010)02-0008-05

Weighted Estimate for Vector-Valued Multilinear Commutators of Maximal Operators

Huang Zheng[1,2]，Huang Aiwu[1]

（1. College of Mathematics and Computer Science，Hunan Normal University，Changsha 410081，China；
2. Department of Mathematics and Computer Science，the Normal College of Jishou University，Jishou Hunan 416000，China）

Abstract：Weighted estimate for vector-valued multilinear cmmutators of maximal operatiors are obtained by using the weighted sharp maximal inequality. Therefore multilinear commutators of maximal function can be extended to bounded operators on vector-valued weighted Lebesgue spaces.

Keywords：maximal function；commutator；weighted Lebesgue space；BMO space

1 问题的提出

受文献[1-4]的研究成果启发，本文研究在加权Lebesgue空间中向量值多线性交换子极大算子的加权估计。若$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$且$b_i\in BMO(\mathbb{R}^n)(i=1,2,\cdots,m)$为有界平均振荡函数（定义见文献[5]），极大算子的多线性交换子$[\boldsymbol{b},M]$、M_ψ、$[\boldsymbol{b},M_\omega]$同文献[3]。

设$\boldsymbol{f}(x)=\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$，记$\left|\boldsymbol{f}(x)\right|_q=\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|f_j(x)\right|^q\right)^{1/q}$，

式中$1<q<\infty$，定义算子$[\boldsymbol{b},M]$、M_ψ相关的向量值多线性交换子为：

$$\left|\boldsymbol{b},M\right|_q\boldsymbol{f}(x)=\left\|\boldsymbol{b},M\right|\boldsymbol{f}(x)\right\|_q=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left|\boldsymbol{b},M\right|f_j(x)\right|^q\right)^{1/q} \quad (1)$$

和$$\left[\boldsymbol{b},M_\psi\right]_q\boldsymbol{f}(x)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left[\boldsymbol{b},M_\psi\right]f_j(x)\right|^q\right)^{1/q}。 \quad (2)$$

记A_p为Muckenhoupt类，$A_\infty=\bigcup_{p\geq 1}A_p$，$A_p$的性质见文献[5]。下面给出本文的主要结论。

定理1 设$1<q<\infty$，$0<p<\infty$，$\omega\in A_\infty$，且$b_i\in BMO(i=1,2,\cdots,m)$，则存在与$\boldsymbol{f}$无关的常量$C$，使得当下式左边有限时

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left[\boldsymbol{b},M\right]_q\boldsymbol{f}(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x\leq$$

$$C[\omega]_{A_\infty}^{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|b_j\right\|_{BMO}^{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left(M_{L\log L}\left(\left|\boldsymbol{f}\right|_q\right)(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

对任意向量函数$\boldsymbol{f}=\{f_i\}$成立，其中$f_i\subset L_c^\infty$。

定理2 设$1<p<\infty$，$0<q<\infty$，$\omega\in A_\infty$且

收稿日期：2009-09-02

通信作者：黄 政（1972-），女，湖南沅江人，吉首大学教师，硕士，主要研究方向为函数论，E-mail：hnjdsyhz@126.com

$b_i\in BMO\ (i=1,2,\cdots,m)$，则存在与$f$无关的常量$C$，使得当下式左边有限时

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi\right]_q f(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x\le$$

$$C[\omega]_{A_\infty}^p\prod_{i=1}^m\|b_i\|_{BMO}^p\int_{\mathbb{R}^n}\left(M_{L\log L}\left(|f|_q\right)(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x$$

对于任意的向量函数$f=\{f_j\}$成立，其中$f_j\subset L_c^\infty$。

定理 1 和 2 中$M_{L\log L}$的定义见文献[1]。通过标准的极限过程，可在空间$L^p\left(l^q\right)(\omega)$中将$[\boldsymbol{b},M]_q$和$\left[\boldsymbol{b},M_\varphi\right]_q$延拓为有界算子。本文中$C$为任意正常数，在不同情形中取值可不同。

2　结论的证明

证明思想源自文献[1]，即对向量值极大算子的多线性交换子做尖锐极大算子的逐点估计。为了陈述本文中结论，首先复述一些定义和记号。极大算子$M_\delta^\#$、M_ω的定义见文献[1]，极大算子M_ω^N、$\left[\boldsymbol{b},N_\varphi^N\right]$的定义见文献[4]。本文中定义

$$\left(M_\varphi^N\right)_q f(x)=\left(\sum_{j=1}^\infty M_\omega^N f_j\right)^{1/q}。$$

设m为任意整数，对于$1\le i\le m$，记C_i^m表示$\{1,2,\cdots,m\}$中i个不同元素$\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(i)\}$的集合，记$\sigma'=\{1,2,\cdots,m\}\setminus\sigma$为$\sigma\in C_i^m$在$\{1,2,\cdots,m\}$中的补集。对任意的$\sigma\in C_i^m$，记$\|\boldsymbol{b}_\sigma\|=\prod_{i\in\sigma}\|b_i\|_{BMO}$，$\|\boldsymbol{b}_\sigma\|=\|\boldsymbol{b}\|$。$\left[\boldsymbol{b}_\sigma,M_\varphi^N\right]$的定义见文献[3]，记

$$\left[\boldsymbol{b}_\sigma,M_\varphi^N\right]_q f(x)=\left(\sum_{j=1}^\infty\left|\left[\boldsymbol{b}_\sigma,M_\varphi^N\right]f_j(x)\right|^q\right)^{1/q},$$

当$\sigma=1,2,\cdots,m$时，记$\left[\boldsymbol{b}_\sigma,M_\varphi^N\right]_q$为$\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q$。

为证明定理还需要一些引理。

引理 1　设$1<q<\infty$且$0<\delta<1$，则存在常数$C>0$，使得$M_\delta^\#\left(M_\varphi^N f_q\right)(x)<CM\left(|f|_q\right)(x)$对任意光滑的向量函数$f=\{f_i\}_{i=1}^\infty$和每个$x\in\mathbb{R}^n$成立。

引理 1 的证明与引理 2 的证明思想相同且证明过程更简单，为节省篇幅省略。

引理 2　设$\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q f$如上，且令$0<\delta<\tau<1$，则存在 1 个与$\delta$和$\tau$有关的常数$C>0$，使得

$$\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q f\right)_\delta^\#(x)<C\left[\|\boldsymbol{b}\|M_{L(\log L)^m}\left(|f|_q\right)(x)+\sum_{i=1}^m\sum_{\sigma\in C_i^m}\|\boldsymbol{b}_\sigma\|M_\tau\left(\left[\boldsymbol{b}_{\sigma'},M_\varphi^N\right]_q f\right)(x)\right]$$

对任意向量函数$f=\{f_i\}_{i=1}^\infty$和每个$x\in\mathbb{R}^n$成立，其中$f_j\subset L_c^\infty$。

证明　首先考虑引理 2 中$m=1$的情况，此时$\boldsymbol{b}=(b)$，简记为b，则有

$$\left[b,M_\varphi^N\right]_q f(x)=\left(\sum_{j=1}^\infty\left|\left[b,M_\varphi^N\right]f_j(x)\right|^q\right)^{1/q},$$

首先固定$x\in\mathbb{R}^n$，且设Q表示中心为x、半径为R的球，分解$f=f^1+f^2$，其中$f^1=f\left(x_{2Q}\right)=\left\{f_j\left(x_{2Q}\right)\right\}$，一般的，$2Q$表示与$Q$同心但半径为$Q$的 2 倍的球体；再固定常数$\lambda$和常数序列$c=\{c_i\}_{i=1}^\infty$，由于对任何$0<r<\infty$，$\left|\alpha^r-\beta^r\right|<C_r\left|\alpha-\beta\right|^r$对任意$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$成立，其中$C_r=\max\left\{1,2^{r-1}\right\}$，可得：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left|\left[b,M_\varphi^N\right]_q f(y)\right|^\delta-|c|_q^\delta\right|\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le\\
&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left[b,M_\varphi^N\right]_q f(y)\right|-|c|_q\right|^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le\\
&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left[b,M_\varphi^N\right]f(y)-c\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}=\\
&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left(b(y)-\lambda\right)M_\varphi^N(f)(y)-M_\varphi^N\left((b-\lambda)f\right)(y)-c\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le\\
&C\left[\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left(b(y)-\lambda\right)M_\varphi^N(f)(y)\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}+\right.\\
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|M_\varphi^N\left((b-\lambda)f^1\right)(y)\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}+\\
&\left.\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|M_\varphi^N\left((b-\lambda)f^2\right)(y)-c\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\right]=\\
&I_1+I_2+I_3。
\end{aligned}$$

为了估计I_1，首先假设$\lambda=(b)_{2Q}$为b在$2Q$上的平均值，对任意$1<p<\tau/\delta$，p'为p的共轭，由Hölder不等式可得：

$$\begin{aligned}
I_1=&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|b(y)-(b)_{2Q}\right|^\delta M_\omega^N(f)(y)\big|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le\\
&C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|b(y)-(b)_{2Q}\right|^{\delta p'}\mathrm{d}y\right)^{1/\delta p'}\cdot\\
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left(M_\varphi^N\right)_q f(y)\right|^{\delta p}\mathrm{d}y\right)^{1/\delta p}\le\\
&C\|b\|_{BMO}M_{\delta p}\left(\left(M_\omega^N\right)_q f\right)(x)\le\\
&C\|b\|_{BMO}M_\tau\left(\left(M_\varphi^N\right)_q f\right)(x)。
\end{aligned}$$

对I_2的估计，由于$(b-\lambda)f^1$可积，且M_φ为弱(1.1)型，由Kolmogorov不等式和文献[1]中引理2.3可得：

$$I_2=C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q M_\varphi^N\left(\left(b-(b)_{2Q}\right)f^1\right)(y)\Big|_q^\delta \mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q \left|b(y)-(b)_{2Q}\right|\left|f^1(y)\right|_q \mathrm{d}y\le$$

$$C\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q}\left|b(y)-(b)_{2Q}\right|\left|f^1(y)\right|_q \mathrm{d}y\le$$

$$C\left|b(y)-(b)_{2Q}\right|_{\exp L,2Q}\left\||f|_q\right\|_{L\log L,2Q}\le$$

$$C\|b\|_{BMO}M_{L(\log L)}\left(|f|_q\right)(x)。$$

对于最后一项I_3的估计，选择

$$c_j=\sup_{0<\varepsilon<N}\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbf{R}^n}\left|b(y)-\lambda\,\varphi_\varepsilon(z-y)\cdot\right.$$

$$\left.\left|f_j^2(y)\right|\chi_{\mathbf{R}^n\setminus 2Q}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right.，$$

因为$x,y,z\in Q$，$w\notin 2Q$则

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\varphi_\varepsilon(z-\omega)\right|\le$$

$$C\frac{|y-z|}{|x-\omega|^{n+1}}\le\frac{CR}{|x-\omega|^{n+1}}，\tag{3}$$

由式（3）和Jensen不等式、Minkowski不等式可得：

$$I_3\le\frac{C}{|Q|}\int_Q\left|M_\varphi^N\left((b-\lambda)f^2\right)(y)-c\right|_q\mathrm{d}y=$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|M_\varphi^N\left(\left(b-(b)_{2Q}\right)f_j^2\right)(y)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(M_\varphi^N\left(\left(b-(b)_{2Q}\right)f_j^2\right)\right)_Q\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q\left(M_\varphi^N\left(\left(b-(b)_{2Q}\right)f_j^2\right)(y)-\right.\right.$$

$$\left.\left.M_\varphi^N\left(\left(b-(b)_{2Q}\right)f_j^2\right)(z)\right)\mathrm{d}z\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q\sup_{0<\varepsilon<N}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\varphi_\varepsilon(z-\omega)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left(b(\omega)-(b)_{2Q}\right)f_j^2(\omega)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y\le$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q\sup_{0<\varepsilon<N}\int_{\mathbf{R}^n}\left|\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\varphi_\varepsilon(z-\omega)\right|\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\left|\left(b(\omega)-(b)_{2Q}\right)\right|\left|f_j^2(\omega)\right|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y\le$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\sup_{0<\varepsilon<N}\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\varphi_\varepsilon(z-\omega)\right|\cdot$$

$$\left.\left(b(\omega)-(b)_{2Q}\right|\left|f_j^2(\omega)\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\mathrm{d}y\le$$

$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbf{R}^n}\left|b(\omega)-(b)_{2Q}\right|\cdot$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{R}{|x-\omega|^{n+1}}f_j^2(\omega)\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\mathrm{d}y\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\left(2^kR\right)^n}\int_{2^kR<|x-\omega|<2^{k+1}R}\left|b(\omega)-(b)_{2Q}\right|\cdot$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j^2(\omega)\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\left(2^kR\right)^n}\int_{2^{k+1}R}\left|b(\omega)-(b)_{2Q}\right|\left|f(\omega)\right|_q\mathrm{d}\omega\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\left(2^kR\right)^n}\int_{2^{k+1}R}\left|b(\omega)-(b)_{2^{k+1}Q}\right|\left|f(\omega)\right|_q\mathrm{d}\omega+$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\left(2^kR\right)^n}\left|b(\omega)-(b)_{2^{k+1}Q}\right|\int_{2^{k+1}R}\left|f(\omega)\right|_q\mathrm{d}\omega\le$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|b\|_{\exp L,2^{k+1}Q}\left\||f|_q\right\|_{L\log L,2^{k+1}Q}+$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}\|b\|_{BMO}M\left(|f|_q\right)(x)\le$$

$$C\|b\|_{BMO}M_{L\log L}\left(|f|_q\right)(x)，$$

上述I_3推导过程中的倒数第3个不等式利用了BMO函数的性质，见文献[5]。

由此，结合$I_1\sim I_3$的估计，且上确界取遍中心在x处的所有球体，这就证明了引理2在m=1的情况。

现在讨论$m\ge 2$的情况。固定$x\in\mathbb{R}^n$，Q仍表示中心在x处半径为R的球体，选择

$$c_j=\sup_{0<\varepsilon<N}\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbf{R}^n}\prod_{j=1}^{m}\left|b_j(y)-\lambda_j\right|\cdot$$

$$\varphi_\varepsilon(z-y)\left|f_j^2(y)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}z，$$

首先估计$\left|\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]f_j(y)-c_j\right|$，其中$y\in Q$，则有

$$\left|\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]f_j(y)-c_j\right|=$$

$$\left|M_\varphi^N\left(\prod_{i=1}^{m}\left(b_i(y)-b_i\right)f_j\right)(y)-c_j\right|=$$

$$\left|M_\varphi^N\left(\left|\prod_{i=1}^{m}\left(b_i(y)-\lambda_i\right)+(-1)^m\prod_{i=1}^{m}\left(b_i-\lambda_i\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}C_{m,j}\left(b(y)-\overline{\lambda}\right)_\sigma\left(b\overline{\lambda}\right)_{\sigma'}\right|f_j\right)(y)-c_j\right|<$$

$$\prod_{i=1}^{m}\left|\left(b_i(y)-\lambda_i\right)\right|M_\varphi^N\left(f_j\right)(y)+$$

$$C\sum_{\sigma\in C_j^m}\left|b(y)-\overline{\lambda}\right|_\sigma M\left(b-\overline{\lambda}\right)_{\sigma'}\left(f_j\right)(y)+$$

$$\left|M_\phi^N\left(\prod_{j=1}^m(b_j-\lambda_j)f_j\right)(y)-c_j\right|<$$
$$\prod_{j=1}^m|b_j(y)-\lambda_j|M_\varphi^N(f_j)(y)+$$
$$C\sum_{\sigma\in C_j^m}|b(y)-\lambda|_\sigma M(b-\lambda)_{\sigma'}(f_j)(y)+$$
$$M_\varphi^N\left(\prod_{j=1}^m(b_j-\lambda_j)f_j^1\right)(y)+$$
$$\sup_{0<\varepsilon<N}\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m|b_j(\omega)-\lambda_j|\cdot$$
$$|\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\varphi_\varepsilon(z-\omega)||f_j^2(\omega)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z,$$

定义$c=\left(\sum_{j=1}^\infty|c_j|^q\right)^{1/q}$，由于$0<\delta<1$，有

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|[\boldsymbol{b},M_\varphi^N]_q\boldsymbol{f}(y)-c\right|^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}\le$$
$$C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|[\boldsymbol{b},M_\varphi^N]\boldsymbol{f}(y)-c\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}<$$
$$C(I_1+I_2+I_3+I_4),$$

其中：

$$I_1=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\prod_{j=1}^m|b_j(y)-\lambda_j|\left(M_\varphi^N\right)_q\boldsymbol{f}(y)\right|^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta};$$
$$I_2=\sum_{\sigma\in C_j^m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left\|b(y)-\bar\lambda\right|_\sigma M(b-\bar\lambda)_{\sigma'}(f)(y)\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta};$$
$$I_3=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|M_\varphi^N\left(\prod_{j=1}^m(b_j-\lambda_j)\boldsymbol{f}^1\right)(y)\right|_q^\delta\mathrm{d}y\right)^{1/\delta};$$
$$I_4=\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left(\sum_{j=1}^\infty\left|\sup_{0<\varepsilon<N}\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j}^m|(b_j(\omega)-\lambda_j)|\cdot\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.|\varphi(y-\omega)-\varphi(z-\omega)||f_j^2(\omega)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}y\right)^{1/\delta}。$$

令$\lambda_j=(b_j)_{Q}$，i=1,2,⋯,m。首先估计I_4，因为$x,y,z\in Q$，$w\notin 2Q$，由式（3）、Minkowski 不等式、BMO 函数的性质和特征（见文献[5]）及文献[1]中的引理 2.3 可得：

$$I_4\le\frac{C}{|Q|}\int_Q\frac{1}{Q}\int_Q\sup_{0<\varepsilon<N}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^\infty\left|\varphi_\varepsilon(y-\omega)-\right.\right.$$
$$\left.\left.\varphi_\varepsilon(z-\omega)\prod_{i=1}^m|b_i(\omega)-(b_i)_{2Q}||f_j^2(\omega)|^q\right|\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\mathrm{d}y\le$$
$$\frac{C}{|Q|}\int_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^m|b_i(\omega)-(b_i)_{2Q}|\cdot$$
$$\left(\sum_{j=1}^\infty\left|\frac{R}{|x-\omega|^{n+1}}f_j^2\right|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z\mathrm{d}y\le$$

$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^kR)^n}\int_{2^kR\le|x-\omega|<2^{k+1}R}\prod_{i=1}^m|b_i(\omega)-(b_i)_{2Q}|\cdot$$
$$\left(\sum_{j=1}^\infty|f_j^2(\omega)|^q\right)^{1/q}\mathrm{d}\omega\le$$
$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^kR)^n}\int_{2^{k+1}R}\prod_{i=1}^m|b_i(\omega)-(b_i)_{2Q}||f(\omega)|_q\mathrm{d}\omega\le$$
$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^kR)^n}\int_{2^{k+1}R}\prod_{i=1}^m|b_i(\omega)-(b_i)_{2^{k+1}Q}-$$
$$(b_i)_{2^{k+1}Q}-(b_i)_{2Q}||f(\omega)|_q\mathrm{d}\omega\le$$
$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^kR)^n}\sum_{\sigma\in C_m^i}\left((b)_{2^{k+1}Q}-(b)_{2Q}\right)_\sigma\cdot$$
$$\int_{2^{k+1}R}|b(\omega)-(b)_{2^{k+1}Q}|_{\sigma'}|f(\omega)|_q\mathrm{d}\omega<$$
$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{k^i}{2^k}\frac{1}{(2^kR)^n}\sum_{\sigma\in C_m^i}\|b_\sigma\|\|b_{\sigma'}\|_{\exp L,2^{k+1}Q}\||f|_q\|_{L\log L,2^{k+1}Q}\le$$
$$C\sum_{k=1}^\infty\frac{k}{2^k}\prod_{i=1}^m|b_i|_{BMO}M_{L\log L}(f_q)(x)\le$$
$$C\prod_{i=1}^m\|b_i\|_{BMO}M_{L\log L}(|\boldsymbol{f}|_q)(x)。$$

对于I_3，类似上述讨论并利用 Kolmogorov 不等式，且M_m为弱(1,1)型，结合文献[1]中的引理 2.3 可得：

$$I_3\le\frac{C}{|2Q|}\int_{2Q}\prod_{i=1}^m|b_i-\lambda_i||\boldsymbol{f}(y)|_q\mathrm{d}y\le$$
$$C\prod_{i=1}^m\|b_i\|_{BMO}M_{L\log L}(|\boldsymbol{f}|_q)(x)。$$

对I_1，因为$\lambda_i=(b_i)_{2Q}$，i=1,2,⋯,m，对有限多个函数利用Hölder不等式（其中$1<p<\tau/\delta$）及 BMO 函数的性质和特征（见文献[5]）可得：

$$I_1\le CM_\tau\left(\left(M_\varphi^N\right)_q\boldsymbol{f}\right)(x)。$$

同理有

$$I_2\le C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}M_\varepsilon\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}\right)(x)。$$

结合$I_1\sim I_4$的估计，且上确界取遍所有中心在x处的球体，就得到了引理 2 在$m\ge 2$时的证明。

定理 2 的证明

为了论证该定理，首先证明对于所有$N>0$有

$$\int_{\mathbb{R}^n}M_\delta\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x\le C[\omega]_{A_\infty}^p\cdot$$
$$\prod_{i=1}^m\|b_i\|_{BMO}\int_{\mathbb{R}^n}\left(M_{L\log L}(|\boldsymbol{f}|_q)(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x,\quad(4)$$

式（4）中常数与N无关。令$N\to\infty$并利用控制收敛定理即可得定理 2。

现在证明式（4），首先设式（4）右边是有限的，否则显然成立；其次令有限个元素

$\boldsymbol{f}_k=(f_1,f_2,\cdots,f_k,0,\cdots)$，并证明式（4）中常数与$k$无关，再令$k$趋于$\infty$。先假设

$$\int_{\mathbf{R}^n} M_\delta\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q \boldsymbol{f}_k\right)(x)\Big|^p \omega(x)\mathrm{d}x<\infty \text{。} \tag{5}$$

现在利用归纳法证明，对于$m=1$的情形，因为$\omega\in A_\infty$，由本文引理2和文献[1]中的引理2.1（其中$0<\delta<1$）可得：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^n}\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q(\boldsymbol{f}_k)(x)\Big|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C\int_{\mathbf{R}^n}M_\delta\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right)(x)\Big|^p\omega(x)\mathrm{d}x<\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\int_{\mathbf{R}^n}\left|M_\delta^\#\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\|b\|_{BMO}^p\int_{\mathbf{R}^n}\left(\left|M_{L(\log L)^m}|\boldsymbol{f}_k|_q(x)+\right.\right.\\&\left.\left.\left|M_\varepsilon\left(M_\varphi^N\right)_q\boldsymbol{f}_k(x)\right|^p\right)\mathrm{d}x\le\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\|b\|_{BMO}^p\int_{\mathbf{R}^n}M_{L(\log L)^m}\left(\boldsymbol{f}_{k\ q}(x)\right)^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}\end{aligned}$$

设式（4）对$1,2,\cdots,m-1$维均成立，以下只需证明m维的情形。由引理1和2及文献[3]中的引理2.1可得：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^n}\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q(\boldsymbol{f}_k)(x)\Big|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C\int_{\mathbf{R}^n}\left|M_\delta\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x<\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\int_{\mathbf{R}^n}\left|M_\delta^\#\left(\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x+\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\sum_{j=1}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\|b_\sigma\|^p\int_{\mathbf{R}^n}\left|M_\varepsilon\left(\left[\boldsymbol{b}_{\sigma'},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C[\omega]_{A_\infty}^p\|b\|^p\int_{\mathbf{R}^n}M_{L(\log L)^m}\left(|\boldsymbol{f}_k|_q\right)(x)^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}\end{aligned}$$

最后，只需要证明式（5）。事实上，因为$\omega\in A_\infty$，存在$r>1$使得$\omega\in A_r$，且选择δ足够小，使得$p/\delta>1$，然后，由Muckenhoupt定理，则只需要验证

$\left\|\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q\boldsymbol{f}_k\right\|_{L^p(\omega)}<\infty$，对于标量情形，利用引理2可得：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{j=1}^k\left|\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right](f_j)(x)\right|^q\right)^{p/q}\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C_k\sum_{j=1}^k\int_{\mathbf{R}^n}\left|\left[\boldsymbol{b},M_\varphi^N\right]_q(f_j)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C_k\|b\|^p\sum_{j=1}^k\int_{\mathbf{R}^n}\left|M_{L(\log L)^m}(f_j)(x)\right|^p\omega(x)\mathrm{d}x\le\\&C_k\|b\|^p\int_{\mathbf{R}^n}M_{L(\log L)^m}\left(\boldsymbol{f}_{k\ q}\right)(x)^p\omega(x)\mathrm{d}x\text{。}\end{aligned}$$

证毕。

定理1的证明

在定理2中，选择φ使得$\chi_{\{|x|\le 1\}}\le\varphi$，则有：$M_b f(x)\le C\omega_b f(x)$，根据定理2，可得定理1。

参考文献：

[1] Perez C，Trujillo-Gonzalez R. Sharp Weighted Estimates for Multilinear Commutators[J]. J. London Math. Soc.，2002 (65)：672-692.

[2] Perez C，Trujillo-Gonzales R. Sharp Weighted Estmates for Vector-Valued Singular Integral Operators and Commutators [J]. Tohoku Math. J.，2003 (55)：109-129.

[3] Xu Jingshi. The Boundedness of Multilinear Commutators of Singular Integrals on Lebesgue Spaces with Variable Exponent [J]. Czechoslovak Math. J.，2007，57 (1)：13-27.

[4] Garcia-Cuerva J，Harboure E，Segovia C，et al. Weighted Norm Inequalities for Commutators of Strongly Singular Integrals[J]. Indiana Univ. Math. J.，1991 (40)：1397-1420.

[5] Grafakos L. Classical and Modern Fourier Analysis[M]. New Jersey：Prentice Hall，2003.

（责任编辑：李玉珍）