第24卷 第2期
2010年3月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.2
Mar. 2010

非线性奇异微分方程的多重周期解

邓翠容

（怀化学院 数学系，湖南 怀化 418008）

摘　要：用变分法研究一类非线性奇异微分方程周期解的多重性问题，得到了一定条件下多重周期解的3个存在性定理。

关键词：临界点；周期解；非线性奇异微分方程

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0004-04

Multiple Periodic Solutions for Nonlinear Singular Differential Equation

Deng Cuirong

（Department of Mathematics，Huaihua University，Huaihua Hunan 418008，China）

Abstract：Applies the variational method to study multiplicity of periodic solutions for a class of nonlinear singular differential equation and obtains three existence theorem for multiple periodic solutions at a certain condition.

Keywords：critical point; periodic solution; nonlinear singular differential equation

0　引言

天体力学中质点的运动规律可以归结为一个非线性微分方程组，称为哈密顿系统，它用来描述天体运动的轨道。哈密顿系统是既经典又现代的研究领域，可以从不同的角度进行研究。由于哈密顿系统具有变分结构，因此，变分原理成为研究哈密顿系统的重要手段，即存在某个泛函，使得对应的非线性微分方程组，即哈密顿系统是它的欧拉方程。因此，求这些欧拉方程的解便化归为求对应泛函的临界点。

本文用变分法探讨非线性奇异微分方程

$$\begin{cases} \left(g(t)\left|u'(t)\right|^{p-2}u'(t)\right)' - \left|u(t)\right|^{p-2}u(t) = \\ \qquad \lambda\nabla F(t,u(t)) \quad \text{a.e. } t\in[0,T], \\ u(0)-u(T) = \\ \qquad g^{q-1}(0)u'(0)-g^{q-1}(T)u'(T)=0 \end{cases} \tag{1}$$

周期解的多重性问题，其中

$T>0, \lambda>0, g\in L^{\infty}(0,T;R^{+}), \operatorname{ess\,inf} g>0, p\geq 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$ $F:[0,T]\times R^{N}\to R$ 满足下面的假设：

对任意的$u\in R^N$，$F(t, u)$关于t可测；对几乎所有的$t\in[0,T]$，$F(t,u)$关于u连续可微。并且存在$a\in C(R^{+},R^{+}), b\in L^{1}(0,T;R^{+})$，使得对一切的$u\in R^N$，几乎所有的$t\in[0,T]$，有：

$$\left|F(t,u)\right|\leq a(|u|)b(t), \left|\nabla F(t,u)\right|\leq a(|u|)b(t)。\tag{2}$$

1　预备知识

定理1[1]　设X是一个Banach空间，且$X=X_1\oplus X_2$，其中X_2是有限维的。设$J\in C^1(E,R)$满足（PS）条件。如果

1）存在常数$r>0$，使得

$J(u)>0, \forall u\in X_1$，且$\|u\|<r$；

$J(u)<0, \forall u\in X_2$，且$\|u\|<r$；

2）J下方有界，且$\inf\limits_{u\in X} J(u)\leq 0$，

则J至少有2个非0的临界点。

收稿日期：2009-08-23

通信作者：邓翠容（1981-），女，湖南新晃人，怀化学院教师，硕士，主要从事非线性集值分析教学与研究，
E-mail：dengcuirong1981@163.com

定理2[2]　设X是一个实自反的Banach空间，Φ，Ψ：$X \to R$为2个序列弱下半连续、且G-可微的泛函。同时，ψ是（强）连续的，且满足$\lim\limits_{|x|\to\infty}\Psi(x)=+\infty$，$\forall \rho > \inf\limits_X \Psi$，设

$$\theta(\rho)=\inf_{x\in\Psi^{-1}(-\infty,\rho)}\frac{\Phi(x)-\inf\limits_{\overline{(\Psi^{-1}(-\infty,\rho))}_w}\Phi}{\rho-\Psi(x)},$$

其中$\overline{(\Psi^{-1}(-\infty,\rho))}_w$表示$\Psi^{-1}(-\infty,\rho)$在弱拓扑下的闭包。此外，设

$$\gamma=\liminf_{\rho\to+\infty}\theta(\rho),\ \delta=\liminf_{\rho\to\left(\inf\limits_X\Psi\right)^+}\theta(\rho),$$

则有下列结论：

1）若$\gamma<-\infty$，则$\forall \mu>\gamma$，下列二者之一成立：或者$\Phi+\mu\Psi$有一个全局极小值点，或者$\Phi+\mu\Psi$存在一个临界点序列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\Psi(x_n)=-\infty$；

2）若$\delta<-\infty$，则$\forall \mu>\delta$，下列二者之一成立：或者ψ有一个全局极小值点是$\Phi+\mu\Psi$的局部极小值点，或者$\Phi+\mu\Psi$存在不同的临界点序列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\Psi(x_n)=\inf\limits_X\Psi$，且$\{x_n\}$弱收敛于$\psi$的一个全局极小值点。

2　主要结果

本文将在实自反可分的Banach空间

$$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)=\{u:[0,T]\to R^N:\ u\text{ 绝对连续}，u(0)=u(T)，u'\in L^p(0,T;R^N)\}$$

上来研究方程（1）。定义该空间上的范数$\|u\|$为

$$\|u\|=\left(\int_0^T|u(t)|^p\,dt+\int_0^T g(t)|u'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}。$$

$\forall u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$，记

$\overline{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt,\tilde{u}(t)=u(t)-\overline{u}$，则

$\|\tilde{u}\|_\infty\le T^{\frac{1}{q}}|u'|_p$（Poincare-Wirting's不等式），

其中：$\|u\|_\infty=\max\limits_{0\le t\le T}|u(t)|$，

$$\forall u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)\setminus\{0\},\|\tilde{u}\|_p\le T\|u'\|_p。$$

此外，存在常数$c>0$，使得

$$\forall u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N),\|u\|_\infty<c\|u\|。$$

对于方程（1），在空间$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$上与之对应的泛函为：

$$\varphi(u)=\int_0^T\left[\frac{1}{p}\left(g(t)|u'(t)|^p+|u(t)|^p\right)+\lambda F(t,u(t))\right]dt,$$

其中φ的临界点为方程（1）的周期解。此外，$\varphi\in C^1(W_{per}^{1,p}(0,T;R^N),R)$且弱下半连续[3]。利用定理1和2，可以得到如下结果。

定理3　若F满足方程（2）及下列条件：

条件F_1：存在常数$\alpha\in(0,P)$，使得

$$\liminf_{|u|\to\infty}\frac{(\nabla F(t,u),u)}{|u|^\alpha}>-\infty$$

对a.e.$t\in[0,T]$一致成立；

条件F_2：$F(t,0)=0$，a.e.$t\in[0,T]$，并且存在常数$\delta>0$及某个$\eta\in R^N$，使得$\forall u\in R^N$:$0<|u|<\delta$，有

$$-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{\text{ess.inf}\,g}{T^p}\right)|u|^p-(\eta,u)\le(\nabla F(t,u),u)\le-\frac{1}{\lambda}|u|^p,$$

则方程（1）至少有2个非0解。

证明　由条件F_1知，存在常数$c_1>0$，$M_1>0$，使得$\forall u\in R^N:|u|>M_1$，对几乎所有的$t\in[0,T]$，有$(\nabla F(t,u),u)\ge -c_1|u|^\alpha$。另外由假设（2）得，$\forall u\in R^N:|u|<M_1$，对几乎所有的$t\in[0,T]$，有$(\nabla F(t,u),u)\ge -a_{M_1}b(t)|u|$，其中$a_{M_1}=\max\limits_{|u|\le M_1}a(|u|)$，于是$\forall u\in R^N$，a.e.$t\in[0,T]$，有

$(\nabla F(t,u),u)\ge -c_1|u|^\alpha-a_{M_1}b(t)|u|$，于是

$$\begin{aligned}&F(t,u)=F(t,u)-F(t,0)+F(t,0)=\\&\int_0^1(\nabla F(t,su),u)ds+F(t,0)\ge\\&\int_0^1\frac{1}{s}\left[-c_1|su|^\alpha-a_{M_1}b(t)|su|\right]ds+F(t,0)=\\&-\frac{c_1}{\alpha}|u|^\alpha-a_{M_1}b(t)|u|+F(t,0),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi(u)=&\\&\int_0^T\left[\frac{1}{p}\left(g(t)|u'(t)|^p+|u(t)|^p\right)-\lambda F(t,u(t))\right]dt=\\&\frac{1}{p}\|u\|^p+\lambda\int_0^T F(t,u(t))dt\ge\\&\frac{1}{p}\|u\|^p-\lambda\frac{c_1}{\alpha}\int_0^T|u(t)|^\alpha dt-\\&\lambda a_{M_1}\int_0^T b(t)|u(t)|dt+\lambda\int_0^T F(t,0)dt\ge\\&\frac{1}{p}\|u\|^p-\lambda\frac{c_1T}{\alpha}\|u\|_\infty^\alpha-\lambda a_{M_1}\|u\|_\infty\cdot\\&\int_0^T b(t)dt+\lambda\int_0^T F(t,0)dt\ge\\&\frac{1}{p}\|u\|^p-c_2\|u\|^\alpha-c_3\|u\|-c_4,\end{aligned}$$

其中c_2，c_3，$c_4>0$。由$p>\alpha$知，当$\|u\|\to\infty$时$\varphi(u)\to+\infty$，

故φ在$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$中强制[4]，从而φ在$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$中有下界[4]。另外，φ的任意（PS）序列有界，从而φ满足（PS）条件。

设$E=\left\{u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N):\int_0^T u(t)\mathrm{d}t=0\right\}$，则$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)=E\oplus R^N$。于是$\forall u\in E:|u|_\infty<\delta$，由条件$F_2$得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left[\frac{1}{p}\left(g(t)|u'(t)|^p+|u(t)|^p\right)-\lambda F(t,u(t))\right]\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{p}\int_0^T g(t)|u'(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t-\\&\lambda\int_0^T\int_0^1\frac{1}{s}(\nabla F(t,su(t)),su(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t>\\&\frac{1}{p}\int_0^T g(t)|u'(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t-\\&\lambda\int_0^T\int_0^1-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{\text{ess.inf}\,g}{T^p}\right)s^{p-1}|u(t)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\&\lambda\int_0^T\int_0^1(\eta,u(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{p}\int_0^T g(t)|u'(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t-\\&\frac{1}{p}\left(1+\frac{\text{ess.inf}\,g}{T^p}\right)\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t>\\&\frac{1}{p}\text{ess.inf}\,g\|u'\|_p^p-\frac{1}{p}\frac{\text{ess.inf}\,g}{T^p}\|u\|_p^p\geq0。\end{aligned}$$

$\forall v\in R^N:|v|<\delta$，由条件$F_2$得

$$\begin{aligned}&\varphi(v)=\int_0^T\left[\frac{1}{p}|v|^p+\lambda F(t,v)\right]\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{p}\int_0^T|v|^p\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T\int_0^1\frac{1}{s}(\nabla F(t,sv),sv)\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\\&\frac{1}{p}\int_0^T|v|^p\mathrm{d}t-\int_0^T\int_0^1\frac{1}{s}|sv|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{p}\int_0^T|v|^p\mathrm{d}t-\frac{1}{p}\int_0^T|v|^p\mathrm{d}t=0。\end{aligned}$$

注意到，$\forall u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N),|u|_\infty\leq c\|u\|$。记$r'=\min\left\{\frac{\delta}{c},\delta T^{\frac{1}{p}}\right\}$，则$\forall u\in E:\|u\|<r'$，有$\varphi(u)>0$；$\forall v\in R^N:\|v\|<r'$，有$\varphi(v)\leq0$。

若$\inf\limits_{u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)}\varphi(u)=0$，则$\forall v\in R^N:\|v\|<r'$均为$\varphi$的极小值点，从而方程（1）有无穷多个解；若$\inf\limits_{u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)}\varphi(u)<0$，则由定理1知$\varphi$至少有2个非0的临界点，从而方程（1）至少有2个非0解。

定理4 若F满足方程（2）及下列条件：

条件F_3：存在序列

$\{r_n\}\subset R^+:\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=+\infty,\{\xi_n\}\subset R^N$，

使得当n充分大时，有：

$$\frac{T}{p}|\xi_n|^p<r_n,\ \inf_{|u|\leq c(pr_n)^{\frac{1}{p}}}F(t,u)=F(t,\xi_n),\text{a.e.}t\in[0,T],$$

其中：$c=\sup\limits_{u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)\setminus\{0\}}\dfrac{\|u\|_\infty}{\|u\|}$；

条件F_4：$\limsup\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{\int_0^T F(t,u)\mathrm{d}t}{|u|^p}<-\dfrac{T}{\lambda p}$，

则方程（1）在$W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$中有一个无界的解序列。

证明 $\forall u\in W_{per}^{1,p}(0,T;R^N)$，设

$$\Psi(u)=\frac{1}{p}\int_0^T|u(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{p}\int_0^T g(t)|u'(t)|^p\mathrm{d}t,$$

$$\Phi(u)=\lambda\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

显然Ψ,Φ均是序列弱下半连续的，$G-$可微，Ψ强连续，$\lim\limits_{\|u\|\to\infty}\Psi(u)=\lim\limits_{\|u\|\to\infty}\frac{1}{p}\|u\|^p=+\infty$，$\Psi+\Phi$的临界点为方程（1）的解。下面用定理2结论1）来证明该结论。先证明定理2中的$\gamma=0$。由于$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=+\infty$，因此只需证明当$n$充分大时，$\theta(r_n)=0$即可（$\theta$的定义见定理2）。

事实上，对充分大的固定的$n\in N$，有

$$\theta(r_n)<\inf_{u\in\Psi^{-1}(-\infty,r_n)}\frac{\Phi(u)-\inf\limits_{\|v\|^p<pr_n}\Phi(v)}{r_n-\Psi(u)},\qquad(3)$$

用w表示在$[0,T]$中取值为ξ_n的常值函数，则由条件F_3得$\Psi(w)<r_n$。此外，$\forall u\in\Psi^{-1}(-\infty,r_n)$，有$\|u\|^p<pr_n$，从而$\|u\|_\infty\leq c(pr_n)^{\frac{1}{p}}$。于是由条件$F_3$得：

$$\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t\geq\int_0^T F(t,\xi_n)\mathrm{d}t,$$

故$\Phi(u)\geq\Phi(w)$，因此$\Phi(w)=\inf\limits_{\|v\|^p<pr_n}\Phi(v)$，于是由式（3）得$\theta(r_n)\leq0$。另一方面，由$\theta(r_n)$的定义知$\theta(r_n)\geq0$，故$\theta(r_n)=0$。

由条件F_4可知，对某个$v>\dfrac{T}{p\lambda}$，存在序列$\{s_n\}\subset R^N,\lim\limits_{n\to\infty}|s_n|=+\infty$，使得当$n$充分大时，有

$$\int_0^T F(t,s_n)\mathrm{d}t\leq-v|s_n|^p。$$

用v_n表示在$[0,T]$中取值为s_n的常值函数，于是当n充分大时，有

$$\begin{aligned}\Phi(v_n)+\Psi(v_n)&=\frac{T}{p}|s_n|^p+\lambda\int_0^T F(t,s_n)\mathrm{d}t\leq\\&\frac{T}{p}|s_n|^p-v\lambda|s_n|^p=\left(\frac{T}{p}-v\lambda\right)|s_n|^p\to-\infty,\end{aligned}$$

于是$\Phi+\Psi$下方无界，从而由定理2结论1）知，$\Phi+\Psi$

存在一个临界点序列$\{u_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}\Psi(u_n)=+\infty$。由于$\Psi$在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$的任一有界集上均有界，故$\{u_n\}$在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$中无界。

定理5　若满足方程（2）及下列条件：

条件F_5：存在序列

$\{r_n\}\subset R^+;\lim_{n\to\infty}r_n=0,\ \{\xi_n\}\subset R^N$，

使得当n充分大时，有：

$\frac{T}{p}|\xi_n|^p<r_n$；

$\inf_{|u|\le c(pr_n)^{\frac{1}{p}}}F(t,u)=(t,\xi_n)$, a.e. $t\in[0,T]$，

其中$c=\sup_{u\in W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_\infty}{\|u\|}$；

条件F_6：$F(t,0)=0$, a.e. $t\in[0,T]$且

$$\limsup_{|u|\to 0}\frac{\int_0^T F(t,u)\mathrm{d}t}{|u|^p}<-\frac{T}{\lambda p},$$

则方程（1）在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$中有1个非0的解序列，并且强收敛于0。

证明　像定理4一样定义Φ与Ψ，则

$\inf_{u\in W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)}\Psi(u)=0$。

由条件F_5同定理4的证明可得$\theta(r_n)=0$（θ的定义见定理2）。又由于$\lim_{n\to\infty}r_n=0,\{r_n\}\subset R^+$，于是定理2中的$\delta=0$。由条件$F_6$可知，对于某个$\omega>\frac{T}{\lambda p}$，存在序列$\{\rho_n\}\subset R^N\setminus\{0\},\rho_n\to 0$，使得当$n$充分大时，有$\int_0^T F(t,\rho_n)\mathrm{d}t\le-\omega|\rho_n|^p$。用$w_n$表示在$[0,T]$中取值为$\rho_n$的常值函数，于是在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$中$w_n\to 0$。当$n$充分大时，有

$$\Phi(w_n)+\Psi(w_n)=\frac{T}{p}|\rho_n|^p+\lambda\int_0^T F(t,\rho_n)\mathrm{d}t\le\left(\frac{T}{p}-\omega\lambda\right)|\rho_n|^p。$$

因为$\Phi(0)=\Psi(0)=0$，所以0不是$\Phi+\Psi$的局部极小值点，但0却是Ψ的全局极小值点，于是由定理2结论2）知，$\Phi+\Psi$存在1个临界点序列$\{u_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}\Psi(u_n)=0$，且在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$中$u_n$弱收敛于0。又

$\lim_{n\to\infty}\Psi(u_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\|u_n\|^p=0$，故$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=0$，故在$W^{1,p}_{per}(0,T;R^N)$中$u_n\to 0$。

参考文献：

[1]　Brezis H. Remarks on Finding Critical Points[J]. Comm. Pure Appl. Math，1991 (44)：939-963.

[2]　Ricceri B. A General Variational Principle and Some of Its Applications[J]. J.Comput. Appl. Math，2000 (113)：401-410.

[3]　Teng Kaimin. On Variational Methods to A Generalized Emden-Fowler Equation[EB/OL]. http://www.springerlink.com/content/72h215736p626v821.

[4]　钟承奎，范先令，陈文源. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州：兰州大学出版社，2004：21-22.
Zhong Chengkui，Fan Xianling，Chen Wenyuan. An Introduction to Nonlinear Functional Analysis[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press，2004：21-22.

[5]　Yu Jianshe，Guo Zhiming. On Boundary Value Problems for A Discrete Generalized Emden-Fouler Equation[J]. Diff. Equ., 2006 (231)：18-31.

（责任编辑：罗立宇）

我社尹志诚编审荣获湖南省“十佳自科期刊编辑”称号

2010年1月29日，中共湖南省委宣传部和湖南省新闻出版局联合发文（湘新出[2010]12号），表彰第四届湖南省“双十佳期刊编辑”，即10名“十佳社科期刊编辑”，10名“十佳自科期刊编辑”。我社尹志诚编审荣获“十佳自科期刊编辑”称号。

湖南工业大学期刊社