第24卷第1期　　湖南工业大学学报　　Vol.24 No.1
2010年1月　　Journal of Hunan University of Technology　　Jan. 2010

非线性Voltterra-Fredholm积分方程Ritz-Galerkin法的收敛性

颜烽阳，洪瑞春，熊之光

（湖南科技大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：针对一类非线性Volterra-Fredholm型积分方程，研究了Rits-Galerkin法求解近似解析解，并利用泰勒展开导出了近似解在Hilbert空间中可达到$o\left(((n+1)!)^{-1}\right)$的收敛性。

关键词：非线性Volterra-Fredholm型积分方程；Ritz-Galerkin法；收敛性

中图分类号：O241.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0060-03

Convergence of Nonlinear Voltterra-Fredholm Integral Equations by Ritz-Galerkin Method

Yan Fengyang，Feng Ruichun，Xiong Zhiguang

（School of Mathematics and Computational Science，Hunan University of Science and Technology，Xiangtan Hunan 411201，China）

Abstract：For a class of nonlinear Voltterra-Fredholm integral equations，studies a approximative solution by using Ritz-Galerkin method. With Taylor expansion, derives the $o\left(((n+1)!)^{-1}\right)$ convergence for the approximative solution in Hilbert space.

Keywords：nonlinear Voltterra-Fredholm integral equations；Ritz-Galerkin method；convergence properties

积分微分方程在流体力学、生物模型、医药学中具有广泛应用。在过去的几十年中，对获得非线性积分微分方程的近似解创立了较多有效的方法，像区域分解法、Wazwaz修正的分解法、Homotopy-Perturbation方法和Taylor方法都被广泛地应用于大型的科学研究中[1-6]。最近几年，一些有效的求近似解的方法被创立，例如Galerkin法和其它一些方法。Galerkin法能广泛应用于椭圆型、抛物线型和双曲线型的具有复杂边值条件的方程中[7-9]。

1　问题的提出

考虑用Galerkin法求解非线性Volterra-Fredholm型积分微分方程

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{m} p_i(x)u^{(i)}(x)=f(x)+\lambda_1\int_a^x k_1(x,t)F\left(u(t)\right)\mathrm{d}t+\\ \qquad\qquad \lambda_2\int_a^b k_2(x,t)G\left(u(t)\right)\mathrm{d}t, \\ u(a)=\alpha,\ u^{(i)}(a)=\beta_i\text{。}\end{cases}\tag{1}$$

其中$f(x)$，$k_1(x, t)$，$k_2(x, t)$，$p_i(x)$ $(i=0, 1,\cdots, m)$都是区间$[a, b]$上可微函数，a、b、λ_1、λ_2都是常数。

为了简化问题，本文只探讨齐次边界条件的非线性Volterra-Fredholm型积分方程

收稿日期：2009-09-06

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（09JJ3011），湖南科技大学研究生创新基金资助项目（S090123）

通信作者：熊之光（1964-），男，湖南凤凰人，湖南科技大学教授，博士，主要研究方向为微分方程数值解法，E-mail：xiongzg2003@yahoo.com.cn

$$\begin{cases} p(x)u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)F\big(u(t)\big)\mathrm{d}t + \\ \qquad \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)G\big(u(t)\big)\mathrm{d}t, \\ u(a) = 0 \text{。} \end{cases} \tag{2}$$

文献[10]研究了方程（1）的Ritz-Galerkin近似解法，并针对几种不同的例子，给出了具体算法和求解结果，但没有给出理论证明，本文仅讨论式（2）的Ritz-Galerkin方法及其收敛性。

2　Ritz-Galerkin 法

设 n 维子空间 H_n 是一个 Hilbert 空间中的子空间，$\{\varphi_i\}_1^n$ 是 H_n 的一组基底。所谓 Galerkin 法，就是寻求 $\bar{u}_n(x) \in H_n$ 满足方程

$$\int_a^b \phi_j(x)\left\{\bar{u}_n(x) - f(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)F\big(\bar{u}_n(x)\big)\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)G\big(\bar{u}_n(x)\big)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = 0 \text{。} \tag{3}$$

式中：$j=1, 2, \cdots, n$，函数$\bar{u}_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$，其中$\phi_0(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$满足方程（2）的非齐次边界条件，$\varphi_j(x)$满足方程（1）的齐次边界条件。当所有的边界条件都是齐次时，$\phi_0(x)=0$。而方程（3）是关于$\{c_i\}$的非线性代数方程组，解出 c_i 代入 $\bar{u}_n(x)$的表达式中就得到了方程（2）的Galerkin解。方程（3）也可等价为：寻求 $\bar{u}_n(x) \in H_n$，使得

$$\int_a^b v_n(x)\left\{u_n(x) - f(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)F\big(u_n(x)\big)\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)G\big(\bar{u}_n(x)\big)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = 0\big(\forall v_n \subset H_n\big) \text{。} \tag{4}$$

3　收敛性和误差估计

对于可用分离变量法的积分微分方程都可以转化为积分方程，具体转化方法和过程见文献[3]。现在探讨式（2）的 Galerkin 解的收敛性和误差估计。

定理　假设 p、f、k_1、k_2、F、G 可微，且 F'、G' 有界，$\min p > \max\big(|\lambda_1 k_1 F'| + |\lambda_2 k_2 G'|\big)$对于 $u(x)$ 是问题（2）的精确解，$\bar{u}_n(x)$是问题（2）的 Galerkin 解，则存在与 u、n 无关的常数 C，使误差 $u(x)-\bar{u}_n(x)$满足如下误差估计$\|u(x) - \bar{u}_n(x)\|_0 \le \dfrac{C}{(n+1)!}$，即有$\lim\limits_{n\to\infty} \bar{u}_n(x) = u(x)$。

证明　对任意的 $v_n(x) \in H_n$，式

$$\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)u(x) - f(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)F\big(u(x)\big)\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)G\big(u(x)\big)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = 0 \tag{5}$$

同样成立。

记 $e= u(x)-\bar{u}_n(x)$，式（4）与（5）相减就得到

$$\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)e - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\big[F\big(u(x)\big) - F\big(\bar{u}_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\big[G\big(u(x)\big) - G\big(\bar{u}_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = 0 \text{。} \tag{6}$$

设 $u_n(x)$为 $u(x)$在点 a 处的 n 次 Taylor 展开多项式，那么其 Lagrange 型余项为：

$$R(x) = u(x) - u_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}u^{n+1}(\xi)(x-a)^{n+1} \quad \big(\xi \in (a, x)\big),$$

再记$\theta(x) = \bar{u}_n(x) - u_n(x)$为 n 次多项式，那么 $e=R(x)-\theta(x)$，从而式（6）转化成下述方程：

$$\begin{aligned} &\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)\theta(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\big[F\big(\bar{u}_n(x)\big) - F\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\big[G\big(\bar{u}_n(x)\big) - G\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x = \\ &\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)R(x) - \lambda_1 \int_a^x k(x,t)\big[F\big(u(x)\big) - F\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\big[G\big(u(x)\big) - G\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x \text{。} \end{aligned} \tag{7}$$

对任意 $v_n(x)$取 $v_n(x) = \theta(x)$，利用中值定理，式（7）右端有如下不等式成立：

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)R(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\big[F\big(u(x)\big) - F\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\big[G\big(u(x)\big) - G\big(u_n(x)\big)\big]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\right| \le \\ &\int_a^b \left|v_n(x)\left\{p(x)R(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)F'\big(u(\xi_1)\big)R(x)\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)G'\big(u(\eta_1)\big)R(x)\mathrm{d}t\right\}\right|\mathrm{d}x \le \\ &\int_a^b |v_n(x)|\left|\left\{p(x)R(x) + \max\big\{|\lambda_1 k_1 F'| + |\lambda_2 k_2 G'|\big\}\int_a^b R(x)\mathrm{d}t\right\}\right|\mathrm{d}x \le \frac{C}{(n+1)!}\int_a^b |v_n(x)|\mathrm{d}x \le \\ &\frac{C}{(n+1)!}\left(\int_a^b v_n^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \frac{C}{(n+1)!}\|\theta\|_0 \text{。} \end{aligned}$$

这里

$$C = \big|p(\zeta)R(\zeta)\big| + \max\big\{|\lambda_1 k_1 F'| + |\lambda_2 k_2 G'|\big\} + (b-a)R(\zeta)$$

为某个常数（式中$\zeta \in [a, b]$），这时式（7）的左端也有如下不等式成立：

$$\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)\theta(x)-\lambda_1\int_a^x k_1(x,t)(F(\overline{u}_n(x))-F(u_n(x)))\mathrm{d}t-\lambda_2\int_a^b k_2(x,t)(G(\overline{u}_n(x))-G(u_n(x)))\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)\theta(x)-\lambda_1\int_a^x k_1(x,t)F'\left(u(\xi_2)\right)\theta(x)\mathrm{d}t-\lambda_2\int_a^b k_2(x,t)G'\left(u(\eta_2)\right)\theta(x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\ge$$

$$\int_a^b v_n(x)\left\{p(x)\theta(x)-\max\left\{\left|\lambda_1 k F'\right|+\left|\lambda_2 k_2 G'\right|\right\}\int_a^b\theta(x)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x>$$

$$\left\{\min p-\max\left\{\left|\lambda_1 k_1 F'\right|+\left|\lambda_2 k_2 G'\right|\right\}\right\}\int_a^b\theta(x)^2\mathrm{d}x=\left\{\min p-\max\left\{\left|\lambda_1 k_1 F'\right|+\left|\lambda_2 k_2 G'\right|\right\}\right\}\left\|\theta\right\|_0^2。$$

假设$M=\min p-\max\left\{\left|\lambda k F'\right|+\left|\lambda_2 k_2 G'\right|\right\}>0$，那么就有

$$M\left|\theta\right\|_0^2\le\frac{C}{(n+1)!}\left\|\theta\right\|_0\Rightarrow\left|\theta\right\|_0\le\frac{C}{M(n+1)!}，从而$$

$$\left\|u(x)-\overline{u}_n(x)\right\|_0\le\left\|u(x)-u_n(x)\right\|_0+\left\|u_n(x)-\overline{u}_n(x)\right\|_0=$$

$$\frac{C}{(n+1)!}+\frac{C}{M(n+1)!}\le\frac{N}{(n+1)!}。$$

所以也有$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{u}_n(x)=u(x)$。

定理证毕。

4 结语

非线性积分微分方程求解精确解通常是比较困难的，本文通过探讨一类非线性积分方程的Galerkin解的收敛性可知，Galerkin 解与精确解的逼近程度较好。

参考文献：

[1] Adomian G. Solving Frontier Problems of Physics：The Decomposition Method[M]. Boston：Kluwer Academic Publishers，1994.

[2] Adomian G，Rach R. Equality of Partial Solution in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations [J]. Comput. Math. Appl.，1990，19 (12)：9-12.

[3] Wazwaz A M. A First Course in Integral Equations[M]. New Jersey：World Scientific，1997.

[4] Wazwaz A M. A Comparison Study between the Modied Decomposition Method and the Traditional Methods for Solving Nonlinear Integral Equations[J]. Applied Math-Ematics and Computation，2006，181：1703-1712.

[5] He J H. Homotopy Perturbation Method for Bifurcation of Nonlinear Problems[J]. Internat. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.，2005(6)：207-208.

[6] Maleknejad K，Mahmoudi Y. Taylor Polynomial Solution of High-Order Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations[J]. Applied Mathematics and Compu-Tation，2003，145：641-653.

[7] Cui Mingrong. A Combined Mixed and Discontinuous Galerkin Method for Copm-Pressible Miscible Displacement Problem in Porous Media[J]. J. Coput. Appl. MArch.，2007，198：19-34.

[8] Xiong Zhiguang. Superconvergence of the Continous Galerkin Finite Element Method for Delay-Differential Equation with Several Terms[J]. J. Comput. Appl. Math.，2007，198：160-166.

[9] H Guoqiang. Asymptotic Error Expansion for the Nystrom Method for A Nonlinear Volterra Fredholm Equations[J]. J. Comput. Appl. Math.，1995，59：49-59.

[10] Afrouzi G A，Yousefi S A，Ganji D D. Numerical Solution of the Nonlinear Voltterra-Fredholm Integro-Differential Equations by Using Ritz-Galerkin Method[J]. The Far East Journal of Mathematics，To Press.

（责任编辑：张亦静）