第24卷第1期
2010年1月

湖南工业大学学报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.1
Jan. 2010

不定积分中的几何背景和表格分部积分法

万 勇，王晓梅

（长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410004）

摘 要：论述了数学背景对数学发展的重要性，提供了不定积分中的几何背景，介绍了不定积分的表格分部积分法及案例，对改革教学内容和改进教学方法进行了尝试。

关键词：不定积分；几何背景；表格分部积分法

中图分类号：O241.83 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2010)01-0057-03

Geometrical Background and Tabular Integration of Indefinite Integral

Wan Yong，Wang Xiaomei

（School of Mathematics and Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410004，China）

Abstract：Dissertates the significance of mathematical background for mathematical development, gives the geometrical background of indefinite integral and introduces tabular integration and several cases. Makes a attempt on the reform of teaching contents and improvement of teaching methods.

Keywords：indefinite integral; geometrical background; tabular integration

1 数学中的背景问题

1.1 古代数学中的背景问题[1]

数学最早是在古埃及发展起来的，尼罗河水每年定期泛滥，淹没河流两岸的谷地，大水过后，法老为了收租需要重新分配、测量土地，埃及人将长期积累起来的土地测量知识逐渐发展为几何学。

埃及人研究出了计算矩形、三角形和梯形面积的计算方法，也获得了圆、立方体、箱体、柱体和其它图形体积的法则。当然有些方法是近似的。

埃及人还把天文知识与几何知识结合起来用于建造神庙，埃及有1座神庙中立着1排柱子，每年只有夏至这天早晨阳光能沿着这排柱子照射进神庙，数一数太阳光2次沿着这排柱子照进庙堂的天数，就是1 a的长度。

在建造金字塔前绘图时，埃及人肯定知道，图样和竣工后的建筑物尺寸尽管可以不同，形状却是一样的，由此可见，当时的埃及人就已掌握了比例和相似形的几何知识。在古埃及，土地测量、天文、建筑等实际问题促进了几何学乃至数学的发展。

1.2 近代数学中的背景问题

可以说数学的发展有着许多实际背景，这里主要讨论几何背景问题，且仅举大家熟悉的3例。

例1 数列极限的几何背景

人们对圆面积精确计算的追求，促进了对数列极限的研究。在图1中，设$A(n)$表示半径为1的圆内接正n边形的面积，显然，$\lim\limits_{n\to\infty} A(n)=\pi$。

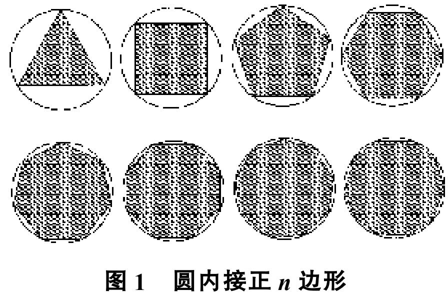

图1 圆内接正n边形

Fig. 1 Regular n-sided polygon inscribed in a circle

收稿日期：2009-09-17

基金项目：应用型本科院校“十一五”国家课题基金资助项目（FIB070335-A2-01）

通信作者：万 勇（1963-），男，湖南长沙人，长沙理工大学副教授，硕士，主要研究方向为微分几何，E-mail：wany@csust.edu.cn

例 2 导数的几何背景

人们对切线斜率的研究，产生了导数。图 2 中，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处有切线 MT，其斜率为 k，在该曲线上另取一点 $N(x, y)$，得到割线 $\overline{MN}$，其斜率为 $k\big|_{MN}=\tan\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，

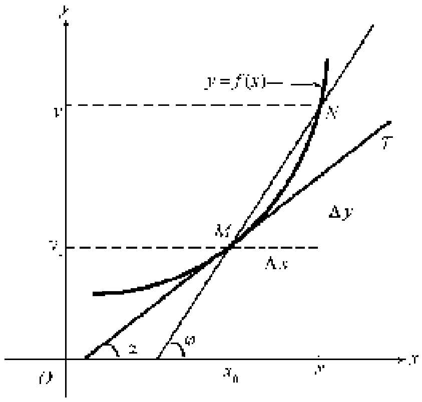

图 2 曲线及其切线

Fig. 2 Curve and its tangent line

让 $N\to M$，即 $x\to x_0$，则点 M 处切线的斜率即点 M 处曲线的导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k。$$

例 3 定积分的几何背景

随着极限理论的完善，曲边梯形的面积问题得到解决。图 3 中，设曲边梯形面积为 A，通过黎曼分割，可得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{|\Delta x_i|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=A$。

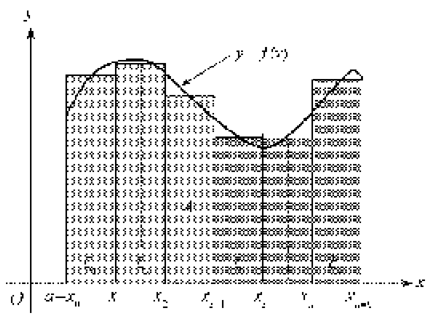

图 3 区间的分割

Fig. 3 Partition of a interval

2 不定积分的几何背景

对先讲授不定积分然后再介绍定积分的教科书，在介绍不定积分或原函数的时候，一般是没有介绍其几何背景的。而对于先讲授定积分再介绍不定积分的教科书，当然不需要介绍不定积分的几何背景。那么，如果先讲授不定积分，则应给学生介绍不定积分或原函数的几何背景知识，下面举例说明。

例 4 设 $f(x)=2$，$A(x)$ 表示 $f(x)$ 在区间 $[-1, x]$ 上的面积，据图 4 可知

$$A(x)=2[x-(-1)]=2x+2,$$

$$A'(x)=(2x+2)'=2=f(x)。$$

由此发现，$A(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[-1, x]$ 上的面积，且 $A'(x)=f(x)$。

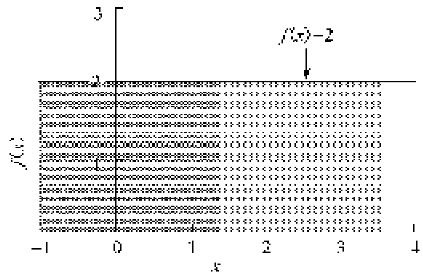

图 4 函数曲线下的面积

Fig. 4 The area under the curve of function

例 5 设 $f(x)=2x+1$，$A(x)$ 表示 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, x\right]$ 上的面积，据图 5 可知

$$A(x)=\frac{1}{2}\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right](2x+1)=x^2+x+\frac{1}{4},$$

$$A'(x)=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)'=2x+1=f(x)。$$

由此发现，$A(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, x\right]$ 上的面积，且 $A'(x)=f(x)$。

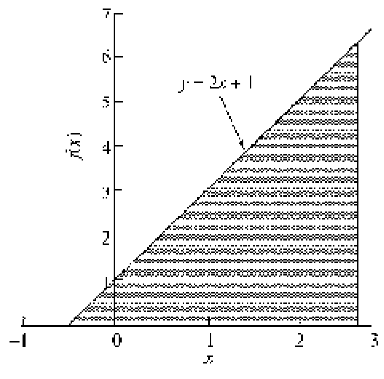

图 5 函数图像下的面积

Fig. 5 The area under the graph of function

定义 1[3] 若 $\forall x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的原函数。原函数 $F(x)$ 的几何意义是：函数 $f(x)$ 在区间 I 上的面积。

定理 1[3] 若 $f(x)$ 在 I 上有原函数，则原函数不惟一，且彼此相差 1 个任意常数。

定义 2[4] 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的 1 个原函数，C 为任意常数，则称 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，即 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$。

定理 2[5] 函数 $f(x)$ 的不定积分为 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$。

不定积分的几何意义是：$f(x)$ 在 I 上的面积是

$\int f(x)\mathrm{d}x$（可能相差 1 个任意常数）。

在不定积分概念的传统教学中，一般不介绍几何背景知识。概念陈述是采用分析的语言，因此是抽象的，不直观的。对于数学思维好的同学来说，没有问题，但对数学思维不那么好的同学来说，有背景的问题毕竟要比没背景的问题容易理解些。笔者在教学中将 2 种方法做了比较，发现介绍了不定积分几何背景的教学班对不定积分概念的理解要好一些。

3　不定积分的表格分部积分法

考虑积分$\int p(x)f(x)\mathrm{d}x$，这里$p(x)$为多项式。通常采用分部积分法$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$，对一些学习好的学生来说，不存在问题，但是对那些学习不那么好的同学，不是“凑”微分出了差错，就是分部积分时弄错了符号。如果采用表格分部积分法，就能避免这些问题，下面介绍表格分部积分法。

表格分部积分法的步骤：

1）对$p(x)$重复求导，直到$p(x)$的导数为 0，将这些导数（从 0 阶导数开始）依次列为第 1 列。

2）对$f(x)$重复积分（积分次数与 1）中求导次数相同，只求最简原函数，将这些积分（从被积函数开始）依次列为第 2 列。

3）从第 1 列的每一行依次向第 2 列的下一行画箭头符号。

4）在各箭头上交替标符号“+”、“−”，其中第 1 个箭头标“+”。

5）将每一个箭头对应的 2 项连同箭头所带的符号作代数积，然后再将各代数积作代数和，这个代数和就是所要求的积分。

证明思路：

$$\int p(x)f(x)\mathrm{d}x = \int p(x)\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) =$$
$$p(x)\int f(x)\mathrm{d}x - \int\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}p(x) =$$
$$p(x)\int f(x)\mathrm{d}x - \int p'(x)\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x = \cdots。$$

例 6　求积分$\int\left(3x^2-5x\right)\cos x\mathrm{d}x$。

解　重复求导　　　　重复积分

$$\begin{array}{lcl}
3x^2-5x & & \cos x \\
 & \searrow^{+} & \\
6x-5 & & \sin x \\
 & \searrow^{-} & \\
6 & & -\cos x \\
 & \searrow^{+} & \\
0 & & -\sin x
\end{array}$$

$$\int\left(3x^2-5x\right)\cos x\mathrm{d}x = \left(3x^2-5x\right)\sin x -$$
$$(6x-5)\cos x - 6\sin x + C。$$

例 7　求积分$\int x^2\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x$。

解　重复求导　　　　重复积分

$$\begin{array}{lcl}
x^2 & & (x-1)^3 \\
 & \searrow^{+} & \\
2x & & \frac{3}{4}(x-1)^{\frac{1}{3}} \\
 & \searrow^{-} & \\
2 & & \frac{9}{28}(x-1)^{\frac{7}{3}} \\
 & \searrow^{+} & \\
0 & & \frac{27}{280}(x-1)^{\frac{10}{3}}
\end{array}$$

$$\int x^2\sqrt[3]{x-1}\mathrm{d}x -$$
$$\frac{3}{4}x^2(x-1)^{\frac{1}{3}} - \frac{9}{14}x(x-1)^{\frac{7}{3}} + \frac{27}{140}(x-1)^{\frac{10}{3}} + C。$$

可见，表格分部积分法都是一些程序性、机械式的做法，不需要什么技巧，可以极大提高学生的学习积极性和学习效果，尤其是教学型大学和职业技术学院的学生。

4　结语

在《高等数学》课程教学中，应尽量让学生摆脱数学知识的枯燥和数学计算的繁琐，了解数学知识的背景问题并给学生提供较为简便的计算方法，能极大地提高学生学习的积极性和学习效果。本文在不定积分教学方面做了一些有益的尝试。

参考文献：

[1]　[佚名]. 古埃及人的数学成就[EB/OL]. [2009-03-18]. http://www.zxxk.com/Article/64699.html.
[Anon]. The Mathematic Achievements of the Ancient Egyptian[EB/OL]. [2009-03-18]. http://www.zxxk.com/Article/64699.html.

[2]　O’neill Barreet. Elementary Differential Geometry[M]. 2nd ed. America：Turing Press，2009.

[3]　同济大学数学系. 高等数学[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007.
Department of Mathematics of Tongji University. Advanced Mathematics[M]. 6th ed. Beijing：Higher Education Press，2007.

[4]　黄立宏，高纯一. 高等数学[M]. 2 版. 上海：复旦大学出版社，2006.
Huang Lihong，Gao Chunyi. Advanced Mathematics[M]. 2nd ed. Shanghai：Fudan University Press，2006.

[5]　Anton Howard，Bivens Irl，Davis Stephen. Calculus[M]. 8th ed. Beijing：Higher Education Press，2008.

（责任编辑：李玉珍）