第24卷 第1期
2010年1月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.1
Jan. 2010

一类非线性组合系统新的稳定性条件

刘 烨，刘建州

（湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘 要：研究组合大系统存在非线性扰动和不确定性时的稳定性问题。通过对微分方程解的结构研究，应用矩阵相似变换和矩阵指数的特性，将原非线性组合系统的稳定性问题转化为线性系统的稳定性问题。根据线性系统渐近稳定的充分条件，导出了原系统渐近稳定新的判定准则。最后运用数值实例说明了该方法的有效性和可行性。

关键词：非线性组合系统；稳定性；微分方程

中图分类号：O231.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0050-03

A New Stability Condition for a Class of Nonlinear Composite Systems

Liu Ye，Liu Jianzhou

（School of Mathematics and Computational Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China）

Abstract：Studies the stability problem of composite systems with nonlinear disturbances and uncertainty. Through the solutions structure of differential equations, matrix similar transformation and matrix exponential properties are applied to translate the stability problem of composite nonlinear systems into that of a linear system. According to linear system sufficient condition for asymptotic stability, deduces a new discriminant criteria for the stability of original systems. Finally, one demonstrative numerical example proves the availability and the effectiveness of the approach.

Keywords：nonlinear composite systems；stability；differential equation

0 引言

自20世纪60年代以来，许多作者从不同角度对非线性大系统的稳定性和镇定问题进行了研究[1-9]。如文献[1-2]构造了Lyapunov函数，用Lyapunov方法来检验线性大系统的稳定性。文献[3]给出了不用Lyapunov函数的判定准则，但其判定方法还要涉及到子系统的稳定性，因此结果趋于保守。文献[4]通过对微分方程解的估计，导出了具有时变时滞系统的时滞无关的稳定性条件，却没有考虑系统的非线性扰动和不确定性因素，且要求子系统是稳定的。文献[5]利用比较原理和M矩阵特性导出了非线性组合系统稳定的充分条件，其假设是非线性和不确定性部分具有范数界，仅用一数值界去刻画，结果具有一定的保守性。文献[6]讨论了不确定非线性子系统经不确定非线性互联而成的组合大系统，给出了可分散反馈镇定的充分条件，其前提是一隐式矩阵方程有解，但一般情形下这一矩阵方程的解是不存在的。

本文在已有研究基础上，讨论了一类非线性组合系统的稳定性问题，获得了新的稳定性判定准则，这一准则还放宽了已有文献对系统不确定性和非线性的要求条件，并对系统的反馈镇定问题也具指导作用。

1 问题描述

考虑由N个子系统构成的非线性组合大系统

收稿日期：2009-09-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971176）
通信作者：刘 烨（1984-），女，河南驻马店人，湘潭大学硕士研究生，主要研究方向为鲁棒稳定与鲁棒控制，
E-mail：moonsea330@126.com

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=A_i x_i(t)+f_i\left(x_i(t),t\right)+\\ \qquad\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\left(H_{ij}x_j(t)+\Delta H_{ij}\left(x_j(t),t\right)\right),\\ x_i(0)=x_{i0},\quad i\in N=\{1,2,\cdots,N\},\end{cases}\tag{1}$$

式（1）中：$x_i(t)\in \mathbf{R}^{n_i\times 1}$为系统的状态向量；

$A_i\in \mathbf{R}^{n_i\times n_i}$为实常数矩阵；

H_{ij}为适当维数的实常数矩阵；

$f_i\left(x_i(t),t\right)\in \mathbf{R}^{n_i\times 1}$为孤立系统的非线性部分，其元素为连续函数；

$\Delta H_{ij}\left(x_j(t),t\right)$为非线性关联部分（可能含有不确定性）。

对系统（1）做以下假设：

假设1　非线性部分

$$\left|f_i\left(x_i(t),t\right)\right|\le D_i\left|x_i(t)\right|,\tag{2}$$

式（2）中：D_i为具有非负对角元的对角矩阵；

$$\left|x_i(t)\right|=\left(\left|x_{i1}(t)\right|,\left|x_{i2}(t)\right|,\cdots,\left|x_{in_i}(t)\right|\right)^{\mathrm{T}}。$$

假设2　关联不确定性

$$\left|\Delta H_{ij}\left(x_j(t),t\right)\right|\le M_{ij}\left|x_j(t)\right|,\tag{3}$$

式（3）中：M_{ij}为具有非负对角元的对角矩阵；

$$\left|x_j(t)\right|=\left(\left|x_{j1}(t)\right|,\left|x_{j2}(t)\right|,\cdots,\left|x_{jn_j}(t)\right|\right)^{\mathrm{T}}。$$

注1　以往大多数文献要求非线性和不确定性满足匹配条件或具有范数界，但仅用一数值界去刻画非线性部分和不确定性，往往导致结果趋于保守，而本文用一向量这样具体模型去描述，比已有文献的限制条件都弱，可使后面的分析过程和结果更为精确。

2　主要结果

对于系统（1），$T_i\in \mathbf{R}^{n_i\times n_i}$设是非奇异矩阵，且有$T_iA_iT_i^{-1}=J_i$，$J_i$是矩阵$A_i$的若当标准型，考虑以下线性变换

$$Z_i(t)=T_ix_i(t),\tag{4}$$

将式（4）代入式（1）中，得到

$$\dot{Z}_i(t)=J_iZ_i(t)+T_if_i\left(T_i^{-1}Z_i(t),t\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(T_iH_{ij}T_j^{-1}Z_j(t)+T_i\Delta H_{ij}\left(T_j^{-1}Z_j(t),t\right)\right)。\tag{5}$$

定理1　定义测试块矩阵$P=\left(P_{ij}\right)$，且

$$P_{ij}=\begin{cases}\mathrm{Re}\left(J_i\right)+\left|T_iD_iT_i^{-1}\right| & (i=j),\\ \left|T_iH_{ij}T_j^{-1}\right|+\left|T_iM_{ij}T_j^{-1}\right| & (i\neq j),\end{cases}\tag{6}$$

其中对矩阵$B=\left(b_{ij}\right)$，定义$|B|=\left(\left|b_{ij}\right|\right)$。若系统（1）的测试块矩阵$P$是稳定的，则该系统是渐近稳定的。

证明　由微分方程的基本性质可知方程式（5）的解为

$$Z_i(t)=\exp(J_it)Z_i(0)+\int_0^t\exp\left(J_i(t-s)\right)\left[T_if_i\left(T_i^{-1}Z_i(s),s\right)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(T_iH_{ij}T_j^{-1}Z_j(s)+T_i\Delta H_{ij}\left(T_j^{-1}Z_j(s),s\right)\right)\right]\mathrm{d}s,\tag{7}$$

进一步，可得到下面的不等式

$$\left|Z_i(t)\right|\le\left|\exp(J_it)\right|\left|Z_i(0)\right|+\int_0^t\left|\exp\left(J_i(t-s)\right)\right|\cdot\left[\left|T_if_i\left(T_i^{-1}Z_i(s),s\right)\right|+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\left|T_iH_{ij}T_j^{-1}\right|\left|Z_j(s)\right|+\left|T_i\Delta H_{ij}\left(T_j^{-1}Z_j(s),s\right)\right|\right)\right]\mathrm{d}s,\tag{8}$$

然后，利用假设1和2条件可得

$$\left|Z_i(t)\right|\le\left|\exp(J_it)\right|\left|Z_i(0)\right|+\int_0^t\left|\exp J_i(t-s)\right|\left[\left|T_iD_iT_i^{-1}\right|\left|Z_i(s)\right|+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\left|T_iH_{ij}T_j^{-1}\right|\left|Z_j(s)\right|+\left|T_iM_{ij}T_j^{-1}\right|\left|Z_j(s)\right|\right)\right]\mathrm{d}s,\tag{9}$$

注意，$\left|\exp J_it\right|=\exp\left(\mathrm{Re}\left(J_it\right)\right)$，同时，令$y_i(t)=\left|Z_i(t)\right|$，则有

$$\left|Z_i(t)\right|\le\exp\left(\mathrm{Re}\left(J_it\right)\right)y_i(0)+\int_0^t\exp\left(\mathrm{Re}(J_it)\right)\cdot\left[\left|T_iD_iT_i^{-1}\right|y_i(s)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left(\left|T_iH_{ij}T_j^{-1}\right|y_j(s)+\left|T_iM_{ij}T_j^{-1}\right|\left|y_j(s)\right|\right)\right]\mathrm{d}s,\tag{10}$$

显然，上式右端是下面微分方程（11）的解

$$\dot{Y}(t)=PY(t),\tag{11}$$

这里，$Y(t)=\left[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_N(t)\right]^{\mathrm{T}}$。当定理1条件满足时，系统（11）是渐近稳定的。

设$\Psi(t)=\left[\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_N(t)\right]^{\mathrm{T}}$是微分方程（11）的最大解，由前述条件可得$\left|Z_i(t)\right|\le\psi_i(t)$，由比较原理可知，系统（11）的渐近稳定性保证了系统（1）的渐近稳定性，定理得证。

注2　文献[3-4]中要求子系统$\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)$是渐近稳定的，本文定理1并未要求矩阵A_i需渐近稳定，但当满足定理1条件时，整个大系统却是渐近稳定的，其中没有涉及子系统的稳定性问题，取消了关联大系统稳定性分析时对子系统的稳定性的不合理限制。

3　数值实例

考虑如下由2个含不确定性的子系统组成的关联系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + \begin{bmatrix} r_{11}(t) & 0 \\ 0 & r_{12}(t) \end{bmatrix} x(t) + \\ \qquad H_{12}x_2(t) + \Delta H_{12}(x_2(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t) + \begin{bmatrix} r_{21}(t) & 0 \\ 0 & r_{22}(t) \end{bmatrix} x_2(t) - \\ \qquad H_{21}x_1(t) + \Delta H_{21}(x_1(t), t), \end{cases}$$

式中：$x_1(t), x_2(t) \in \mathbf{R}^2$，各相关系数矩阵给定如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -5/3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0.27 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad H_{21} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$|r_{11}(t)| \le 0.15, \quad |r_{12}(t)| \le 0.02,$$

$$|\Delta H_{12}(x_2(t), t)| < \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} x_2(t),$$

$$|r_{21}(t)| \le 0.2, \quad |r_{22}(t)| \le 0.5,$$

$$|\Delta H_{21}(x_1(t), t)| < \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t)。$$

解 经计算得

$$J_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}。$$

根据定理可得$P = \begin{bmatrix} -3.85 & 1 & 0.074 & 0.148 \\ 0.065 & -1.98 & 0.037 & 0.359 \\ 3.176 & 0 & -3.8 & 0.401 \\ 0.167 & 0 & 0 & -6.5 \end{bmatrix}$，

由计算结果知：

$$\max(\operatorname{Re}\lambda(P)) = \max\left(\begin{bmatrix} -6.503\,8 \\ -4.272\,0 \\ -3.451\,3 \\ -1.902\,8 \end{bmatrix}\right) < 0,$$

同时可看出，P为负M矩阵，故此系统为渐近稳定的。

此例中的非线性部分和不确定性便不是用范数界（一数值界）去估计的，更没有要求匹配条件。

4 结语

本文以定理1的形式给出了关于系统（1）的稳定性判定准则，其优点在于运用该准则可避免构造Lyapunov函数，其要求的假设条件比已有文献所要求的均宽松，在推导过程中运用该准则可使结论更为精确，且不涉及子系统的稳定性。此外，本文的结果还可用于非线性组合大系统鲁棒分散镇定的研究。

参考文献：

[1] Bailey F N. The Application of Lyapunov's Second Method to Interconnected Systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization，1965，3(3)：443-462.

[2] Matrosor V M. Method of Lyapunov Vector Functions in Feedback Systems[J]. Aut.Remote Cont，1972，33：1458-1469.

[3] 盖如栋，井元伟，张嗣瀛. 一类非线性组合大系统的稳定性[J]. 自动化学报，1997，23(1)：73-76.
Gai Rudong，Jing Yuanwei，Zhang Siying. Stability of A Class of Nonlinear Large Scale Composite Systems[J]. Acta Automatica Sinica，1997，23(1)：73-76.

[4] 周少武，张志飞，谭 文，等. 具有时变时滞大系统的新的稳定性条件[J]. 湘潭矿业学院学报，2001，16(4)：81-83.
Zhou Shaowu，Zhang Zhifei，Tan Wen，et al. A New Sufficient Condition for Stability of Large-Scale Systems with Time-Delay[J]. Journal of Xiangtan Mining Institute，2001，16(4)：81-83.

[5] 张志飞，苏彩虹，章 兢. 基于比较原理的非线性组合大系统的输出反馈镇定[J]. 控制与决策，2007，22(7)：836-840.
Zhang Zhifei，Su Caihong，Zhang Jing. Output Feedback Stabilization for Composited Nonlinear Systems Based on Comparison Principle[J]. Control and Decision，2007，22 (7)：836-840.

[6] Yan X G，Zhang S Y. Decentralized Output Feedback Robust Stabilization for A Class of Nonlinear Interconnected Systems [J]. IEEE Trans Automatic Control，1998，43(2)：294-299.

[7] Zhang Siying. Study on Symmetric and Similar Structures of Complex Control Systems[J]. Journal of Qingdao University，2001，14(4)：3-6.

[8] Chen Ning，Gui Weihua，Cai Zixing. Decentralized Robust H_∞ Control for Uncertain Large-Scale Systems Using Linear Matrix Inequalities[J]. Journal of Central South University of Technology，2003，34(6)：72-76.

[9] 年晓红，李鑫滨，杨 莹，等. Lurie控制系统的关联绝对稳定性一双线性矩阵不等式方法[J]. 控制理论与应用，2005，22(6)：999-1004.
Nian Xiaohong，Li Xinbin，Yang Ying，et al. Bilinear Matrix Inequality Approach to the Absolute Stability of Interconnected Lurie Control Systems[J]. Control Theory & Applications，2005，22(6)：999-1004.

（责任编辑：李玉珍）