多目标投资组合模型的理想点解法

陈国华，廖小莲

（湖南人文科技学院 数学系，湖南 娄底 417000）

摘　要：对多目标证券组合投资模型进行了研究，该模型用于解决多目标线性优化问题，模型以绝对偏差和代替方差、以换手率刻画流动性。研究考虑到了投资者的效用函数，采用理想点法对模型进行了求解，便于实际操作；通过实例分析了该模型的应用价值。

关键词：多目标规划；证券投资组合；理想点法；流动性

中图分类号：F830.59；O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0047-04

An Ideal Method for Multiobjective Portfolio Selection

Chen Guohua，Liao Xiaolian

（Department of Mathematics，Hunan Institute of Humanities Science and Technology，Loudi Hunan 417000，China）

Abstract：A multi-objective portfolio selection（MADL）is studied, which solves multi-objective linear optimal problems. The model replaces the risk with the sum of the absolute deviation and depicts liquidity by turnover. Considers the utility function about investors and applies an ideal point method for solving the model, which facilitates the actual operation. Finally analyzes the application value of the model through examples.

Keywords：multi-objective programming; portfolio selection model; an ideal point method; liquidity

1952年，Harry Markowitz提出了证券组合投资均值－方差模型，它为现代证券组合投资理论奠定了基础[1]，国内外许多学者依据这些理论对证券组合投资进行了深入的研究，采用不同的方法得出了一系列的研究成果[2-4]。严应超等[5]以我国证券市场上2种基本的金融资产股票和债券为例进行了具体的实证分析，得出了多目标投资组合模型要优于单一目标投资组合模型的结论。本文以总体风险损失率作为投资组合的风险度量，以换手率刻画流动性，建立了多目标投资组合模型。鉴于多目标规划问题绝对最优解通常是不存在的，本文采用理想点法对模型进行求解，并给出了实际算例。

1　多目标投资组合模型的建立

在现代投资组合理论中经常使用多目标投资组合模型，王梦东等在文献[6]中引入了偏好参数θ，将多目标问题转化为单个目标的二次规划问题，既能弥补以前的模型缺陷，又能寻找到更好的解法来获得有效投资组合；肖冬荣等[7]在Markowitz的均值方差投资组合模型的基础上引入偏度水平，并用伸缩指标相应做出均值、方差和偏度3个模糊目标，形成一类新的非线性多目标投资组合模型；周洪涛等在文献[4]中将模糊集合的概念引入投资组合模型中，并将多目标投资组合模型中的收益、方差和偏度3个目标模糊化，建立了模糊多目标投资组合模型，并提出了一个动态遗传算法求解；王俊等[8]根据信息论中熵的概念，提出用熵来度量投资组合对风险的分散能力，同时提出了兼顾收益、风险、熵的多目标投资组合模型，并用改进的经典遗传算法求解该模型。

在证券投资决策理论中，投资收益和投资风险被

收稿日期：2009-09-24
基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（07C389）
通信作者：陈国华（1969-），男，湖南娄底人，湖南人文科技学院副教授，主要从事运筹学与数理金融研究，
E-mail：hnldcgh@163.com

认为是投资者所关心的2个主要因素。然而，在证券投资实践中，证券的流动性也不能忽视。证券的流动性是指证券的变现能力，目前度量证券流动性的方法较多，其中广为使用的方法主要有：交易股数、交易笔数、交易金额、换手率和流通速度。换手率是股票成交量（或成交额）与流通盘（或流通市值）的比值，它充分反映了股票的流动性[9]。本文以换手率来刻画流动性，建立带流动性的多目标投资组合模型（MADL）如下：

$$\begin{cases}\max f(x)=\sum_{j=1}^{n}E\left(R_j\right)x_j,\\ \min V(x)=\sum_{j=1}^{n}d_jx_j,\\ \max L(x)=\sum_{j=1}^{n}l_jx_j,\\ \text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1,\end{cases}$$

在模型中：$0\le x_j\le 0.5,\ j=1,2,\cdots,n$；

$d_j=E\left|R_j-E\left(R_j\right)\right|$；

第j种证券的收益率为随机变量R_j，预期收益率为$E\left(R_j\right)$；

$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$是资金投资于各证券的比例，以$l_j$表示第$j$种证券的换手率，则$\sum_{j=1}^{n}l_jx_j$表示投资组合$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$的流动性。

2 多目标组合线性优化模型的求解

由于MADL是一个多目标线性规划问题，其绝对最优解通常是不存在的。证券组合投资决策的实质是寻求MADL的Pareto有效解，相应的证券组合称为有效的。多目标规划已有较多的解法[10]，基本方法有：主要目标法、分层序列法、评价函数法、理想点法、线性加权法等。本文中采用理想点法求解，理想点解法的优点是能根据投资者相应的满意程度得到满意的投资组合，其具体做法如下：

1）分别求下面3个规划问题的最优解和最优值

P1 $\max f(x)=\sum_{j=1}^{n}E\left(R_j\right)x_j$,

$\text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \quad \left(0\le x_j\le 0.5,\ j=1,2,\cdots,n\right)$；

P2 $\min V(x)=\sum_{j=1}^{n}d_jx_j$,

$\text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \quad \left(0\le x_j\le 0.5,\ j=1,2,\cdots,n\right)$；

P3 $\max L(x)=\sum_{j=1}^{n}l_jx_j$,

$\text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \quad \left(0\le x_j\le 0.5,\ j=1,2,\cdots,n\right)$。

设P1，P2，P3的最优值分别为$f^*(x)$，$V^*(x)$，$L^*(x)$，最优解分别为$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(3)}$，则理想点为$F^*=\left(f^*(x),\ V^*(x),\ L^*(x)\right)$。

2）检验理想点，如果$x^{(1)}=x^{(2)}=x^{(3)}$，绝对最优解为$x^*=x^{(1)}$,否则，求单目标最优化问题

$$\begin{cases}\min\left\{\lambda_1\left(f(x)-f^*(x)\right)^2+\lambda_2\left(V(x)-V^*(x)\right)^2+\lambda_3\left(L(x)-L^*(x)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\\ \text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \quad \left(0\le x_j\le 0.5, j=1,2,\cdots,n\right)\end{cases}$$

的最优解。

上述规划的目标函数为考虑投资者偏好程度的评价函数，其中$\lambda_i(i=1, 2, 3)$分别表示投资者对3个目标的偏好程度，偏好程度大的目标给予较大的权重，权重系数由投资者决定，且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。

3 数值算例

设已知9种股票2005年01月~2006年06月的月收益情况如表1所示，日平均换手率为参考换手率，见表2，通过Excel的计算，求得9种股票的预期收益率及$d_j=E\left|R_j-E(R)\right|$，见表3、4。

表1 9种股票2005年01月~2006年06月的月收益情况

Table 1 Monthly earnings of 9 kinds of stock in January 2005 ~ June 2006

时间段	股票序号								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005-01	−0.305	−0.173	−0.318	−0.477	−0.457	−0.065	−0.319	−0.400	−0.435
2005-02	0.513	0.098	0.285	0.714	0.107	0.238	0.076	0.336	0.238
2005-03	0.055	0.200	−0.047	0.165	−0.424	−0.078	0.381	−0.093	−0.295
2005-04	−0.126	0.030	0.104	−0.043	−0.189	−0.077	−0.051	−0.090	−0.036
2005-05	−0.280	−0.183	−0.171	−0.277	0.637	−0.187	0.087	−0.194	−0.240
2005-06	−0.003	0.067	−0.039	0.476	0.865	0.156	0.262	1.113	0.126

续　表

时间段	股票序号								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005-07	0.428	0.300	0.149	0.225	0.313	0.351	0.341	0.580	0.639
2005-08	0.192	0.103	0.260	0.290	0.637	0.233	0.227	0.473	0.282
2005-09	0.446	0.216	0.419	0.216	0.373	0.349	0.352	0.229	0.578
2005-10	−0.088	−0.046	−0.078	−0.272	−0.037	−0.209	0.153	−0.126	0.289
2005-11	−0.127	−0.071	0.169	0.144	0.026	0.355	−0.099	0.009	0.184
2005-12	−0.015	0.056	−0.035	0.107	0.153	−0.231	0.038	0	0.114
2006-01	0.305	0.038	0.133	0.321	0.067	0.246	0.273	0.223	−0.222
2006-02	−0.096	0.089	0.732	0.305	0.579	−0.248	0.091	0.650	0.327
2006-03	0.016	0.090	0.021	0.195	0.040	−0.064	0.054	−0.131	0.333
2006-04	0.128	0.083	0.131	0.390	0.434	0.079	0.109	0.175	0.062
2006-05	−0.010	0.035	0.006	−0.072	−0.027	0.067	0.210	−0.084	−0.048
2006-06	0.154	0.176	0.908	0.715	0.469	0.077	0.112	0.756	0.185

表 2　9 种股票 2005 年 01 月 ~2006 年 06 月的日平均换手率

Table 2　The daily average turnover rate of 9 kinds of stock in January 2005 ~ June 2006

股票序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
换手率	0.035	0.017	0.132	0.048	0.105	0.060	0.030	0.080	0.050

表 3　9 种股票的预期收益率

Table 3　The expected return rate of 9 kinds of stocks

股票序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
预期收益率	0.065 9	0.061 6	0.146 1	0.173 4	0.198 1	0.055 1	0.127 6	0.190 3	0.115 6

表 4　9 种股票的 $d_j = E\left|R_j \quad E(R)\right|$

Table 4　9 kinds of stocks $d_j = E\left|R_j \quad E(R)\right|$

股票序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_j	0.189 4	0.089 6	0.211 1	0.234 7	0.302 5	0.177 8	0.130 9	0.315 3	0.225 0

利用理想点法的最短距离算法求解，得到理想点 F=(0.194，0.000 11，0.118 5)，其中，$f(x)$的极小点$\boldsymbol{x}_1^*$= $(0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0.5, 0)^{\mathrm{T}}$，$V(x)$的极小点$\boldsymbol{x}_2^*$= $(0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$L(x)$的极小点$\boldsymbol{x}_3^*$= (0, 0, 0.5, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0)，因为$\boldsymbol{x}_1^*$与$\boldsymbol{x}_2^*$和$\boldsymbol{x}_3^*$都不同，下面求单目标最优化问题：

$$\begin{cases}\min\Big\{\lambda_1\left(f(x)-f^*(x)\right)^2+\lambda_2\left(V(x)-V^*(x)\right)^2+ \\ \qquad\qquad \lambda_3\left(L(x)-L^*(x)\right)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}, \\ \text{s.t.}\sum_{j=1}^{n}x_j=1 \quad \left(0\le x_j\le 0.5,\ j=1,2,\cdots,n\right).\end{cases}$$

取λ_1= 1/3、λ_2= 1/2、λ_3= 1/6，利用MATLAB计算工具，代入数据求得最优解$\boldsymbol{x}^*$= $(0, 0, 0.075\ 6, 0, 0.924\ 4, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，即选择第3种和第5种股票的比率为0.075 6∶0.924 4进行投资是最优的选择，其预期收益率为0.198，风险率为0.000 55，流动性为0.132。

4　结语

本文将投资组合预期收益极大化和投资组合绝对偏差和（风险）极小化作为目标，建立了一种多目标证券组合投资模型。鉴于多目标规划问题绝对最优解通常是不存在，本文采用理想点法求解，给出了数值算例，说明了模型的可行性。

参考文献：

[1] Markowitz H. Portfolio Selection：Efficient Diversification of Investments[M]. New York：Wiley，1959.

[2] Konno H，Yamazaki H. Mean-Variance Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market[J]. Management Science，1991，37(5)：519−531.

[3] Cai X Q，Teo K，Yang X Q，et al. Portfolio Optimization under a Minimax Rule[J]. Management Science，2000，46：957−972.

（下转第 56 页）