一类Bayes公式的推导及在小子样评估中的应用

段晓君[1]，杜小勇[2]

（1. 国防科学技术大学 理学院，湖南 长沙 410073；2. 国防科学技术大学 电子科学与工程学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：工程中昂贵复杂系统的整机试验通常是小子样的，因此需要结合大量的先验信息进行系统评估，但这可能造成小子样的整机试验数据的信息被淹没。与通常考虑加权的融合方法不同，基于精度评估的正态逆伽玛分布推导了一类Bayes公式，将所有先验信息等价为单个整机试验数据，设计了相应的分布参数，结合等价先验样本量得到推导的后验结果，并给出案例分析了这类Bayes公式的应用范围和合理性。

关键词：Bayes公式；小子样评估；先验信息；数据融合

中图分类号：O212　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0043-04

The Deduction of One Type of Bayes Formula and Its Application in Small Sample Evaluation

Duan Xiaojun[1]，Du Xiaoyong[2]

（1. College of Science，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China；
2. School of Electronic Science and Engineering，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：The overall test of the complex and high-cost system is small sample in general. Therefore, some prior information is needed for the evaluation of the complex system, and results in the information of the overall small sample test submerged. Different from the general weight method, one type of Bayes formula is deduced based on the normal inverse Gamma distribution of accuracy evaluation, the prior information is equivalent to one overall test data and the corresponding distribution parameters are designed, and the posterior result is deduced by combining the prior sample. Finally an example is provided to analyze the formula's validity and its application area.

Keywords：Bayes formula; small sample evaluation; prior information; data fusion

对于大型复杂系统的小子样试验需要融合一部分先验样本才能做出更准确的评估结论。先验样本是根据分系统试验、已有类似的试验、仿真试验等试验数据得到的，已经进行过数学相容性检验，也即通常所称的先验信息。相比较于小子样实际整机试验，通常会有较大量的先验样本。在工程应用中，为避免大量先验信息湮没实际飞行试验的信息，必须考虑给先验样本进行加权[1-2]，这些加权一般是基于数学相容性检验，目前也提出了很多小子样情形下的相容性检验方法和加权方法[2-4]。文献[5]针对目前昂贵的大型复杂结构系统的极小子样试验的情形，给出了半经验试验评估方法，即在由经验已知同类试验的密度分布形式及离散性参数情况下，据本次试验件的试验均值即可得出在某个置信度要求下的所讨论参数的下限值。

在试验样本量较小，但有先验样本可资利用的条件下，使用Bayes方法可对命中精度进行点估计和置

收稿日期：2009-09-18
基金项目：航天支撑技术基金资助项目（2009-HT-GFKD），国防科学技术大学研究生重点建设课程资助项目（1151B007）
通信作者：段晓君（1976-），女，江西九江人，国防科学技术大学副教授，博士，主要研究方向为系统分析与评估，数据处理，E-mail：xj_duan@163.com

信区间或置信上界估计。

1 基于正态逆伽玛分布和等价先验样本量的分布参数确定

设有 $N(\mu,D)$ 总体（其中 $D=\sigma^2$），先验样本 $\left\{x_i^{(0)}\right\}_{i=1}^{n_0}$，先验样本均值和方差分别为 $X_0 \doteq a=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}x_i^{(0)}$，$S_0^2\doteq u=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}\left(x_i^{(0)}-a\right)^2$，则 $(a,u)=\left(a,S_0^2\right)$ 为 (μ,D) 的充分统计量。以下要给出已知 $\left(a,S_0^2\right)$ 的情况下，参数 (μ,D) 的分布形式。

由于 $\pi\left(\mu,D\middle|a,S_0^2\right)=\pi\left(a,S_0^2\middle|\mu,D\right)\cdot\frac{\pi(\mu,D)}{\pi\left(a,S_0^2\right)}$，而一般地认为给定参数 (μ,D) 的情况下，a 服从正态 $N\left(\mu,\frac{D}{n_0}\right)$ 分布，而对于方差 S_0^2 而言，$\xi\doteq\frac{n_0}{D}S_0^2=\frac{n_0}{D}u$ 服从 $\chi^2(n_0-1)$ 分布，故有 $\pi\left(a\middle|\mu,D\right)\propto D^{-\frac12}e^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}$。

由于 $\chi^2(n)$ 分布的分布函数为 $f(x)=2^{-\frac n2}\cdot\frac{1}{\Gamma(n/2)}x^{\frac n2-1}e^{-\frac x2}$，故 $\chi^2(n_0-1)$ 的分布函数为 $f(x)=2^{-\frac{n_0-1}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}x^{\frac{n_0-3}{2}}e^{-\frac x2}$，则 $u=\frac{D}{n_0}\xi$ 变换后的分布函数为 $f(y)=2^{-\frac{n_0-1}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma((n_0-1)/2)}\left(\frac{n_0}{D}y\right)^{\frac{n_0-3}{2}}e^{-\frac12\left(\frac{n_0}{D}y\right)}\cdot\frac{n_0}{D}$，即得 $\pi\left(u\middle|\mu,D\right)\propto u^{\frac{n_0-3}{2}}D^{-\frac{n_0-1}{2}}e^{-\frac{n_0u}{2D}}$（$u>0$）。

由于 a,S_0^2 独立，故

$\pi\left(a,S_0^2\middle|\mu,D\right)\propto D^{-\frac12}e^{-\frac{n_0}{2D}(a-\mu)^2}u^{\frac{n_0-3}{2}}D^{-\frac{n_0-1}{2}}e^{-\frac{n_0u}{2D}}$。将所有的先验样本信息进行归一化处理，取 $n_0=1$，则 $\pi\left(a,S_0^2\middle|\mu,D\right)\propto D^{-\frac12}e^{-\frac{1}{2D}(a-\mu)^2}e^{-\frac{u}{2D}}$。若假定先验 $\pi(\mu,D)\propto D^{-2}$，则有

$$\pi\left(\mu,D\middle|a,S_0^2\right)=\pi\left(a,S_0^2\middle|\mu,D\right)\cdot\frac{\pi(\mu,D)}{\pi\left(a,S_0^2\right)}\propto D^{-\frac12}e^{-\frac{1}{2D}(a-\mu)^2}D^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{u}{2D}},$$

此时 $\alpha=1$，$\beta=\frac{u}{2}=\frac{1}{2n_0}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(0)}-a\right)^2$，常数归一化即有先验分布为

$$p(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(\mu-a)^2}{2D^{1/2}}\right\}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right),$$

分布参数为：$a=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}x_i^{(0)}$，$\beta=\frac{1}{2n_0}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(0)}-a\right)^2$，$\alpha=1$。

2 后验分布参数的推导结果

设获得整机实际试验样本 $\{x_i\}_{i=1}^n$，i.i.d.~$N(\mu,D)$，记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，则联合分布密度函数为

$$p(\boldsymbol{x},\mu,D)=p(\mu,D)\prod_{i=1}^n p(x_i|\mu,D)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\right]^n\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(\mu-a)^2}{2D}\right\}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right),$$

从而 $\boldsymbol{x}$ 的边缘分布为

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\iint p(\boldsymbol{x},\mu,D)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}D=\int\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\right]^n\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)\mathrm{d}D\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n+1}(\mu-x_i)^2\right\}\mathrm{d}\mu=\\&\int\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\right]^n\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)\mathrm{d}D\cdot\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2D}\left[(\mu-\bar{x}_{n+1})^2+\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2\right]\right\}\mathrm{d}\mu=\\&\frac{1}{\sqrt{n+1}}\int\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\right]^n\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2\right\}\mathrm{d}D=\\&\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\int D^{-\left(\alpha+\frac n2+1\right)}\exp\left(-\frac{\tilde\beta}{D}\right)\mathrm{d}D,\end{aligned}\tag{1}$$

其中参数 $\bar{x}_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i$、$x_{n+1}=a$、$\tilde\beta=\beta+\frac12\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2$，于是

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\int D^{-\left(\alpha+\frac n2+1\right)}\exp\left(-\frac{\tilde\beta}{D}\right)\mathrm{d}D\overset{y=D^{-1}}{=}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\int y^{\alpha+\frac n2+1-2}\exp\left(-\tilde\beta y\right)\mathrm{d}y\overset{x=\tilde\beta y}{=}\\&\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\tilde\beta^{-\left(\alpha+\frac n2\right)}\int x^{\alpha+\frac n2-1}\exp(-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\tilde\beta^{-\left(\alpha+\frac n2\right)}\Gamma\left(\alpha+\frac n2\right)。\end{aligned}\tag{2}$$

由式（1）、（2）可知后验分布为

$$p(\mu,D|x)=\frac{p(x,\mu,D)}{p(x)}=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\right]^n\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(\mu-a)^2}{2D}\right\}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}D^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)/$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^n\tilde{\beta}^{-\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n+1}(\mu-x_i)^2\right\}\frac{\tilde{\beta}^{\alpha-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}D^{-\left(\alpha-\frac{n}{2}+1\right)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n+1}\left[(\mu-\bar{x}_{n+1})^2+(x_i-\bar{x}_{n+1})^2\right]\right\}\frac{\tilde{\beta}^{\alpha+\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)}D^{-\left(\alpha+\frac{n}{2}+1\right)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2D}(\mu-\bar{x}_{n+1})^2\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2\right\}\frac{\tilde{\beta}^{\alpha+\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}D^{-\left(\alpha-\frac{n}{2}+1\right)}\exp\left(-\frac{\beta}{D}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2D}(\mu-\bar{x}_{n+1})^2\right\}\frac{\tilde{\beta}^{\alpha+\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)}D^{-\left(\alpha+\frac{n}{2}+1\right)}\exp\left(-\frac{\tilde{\beta}}{D}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}D^{1/2}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2D}(\mu-\bar{x}_{n+1})^2\right\}\frac{\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}}}{\Gamma(\tilde{\alpha})}D^{-(\tilde{\alpha}+1)}\exp\left(-\frac{\tilde{\beta}}{D}\right),$$

其中后验分布的参数为：

$$\tilde{\alpha}=\alpha+\frac{n}{2},\ \bar{x}_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\frac{1}{n+1}\left[a+\sum_{i=1}^{n}x_i\right],$$

$$\tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2=$$

$$\beta+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_{n+1})^2+(x_{n+1}-\bar{x}_{n+1})^2\right]=$$

$$\beta+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n+\bar{x}_n-\bar{x}_{n+1})^2+(x_{n+1}-\bar{x}_{n+1})^2\right]=$$

$$\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_n-\frac{\bar{x}_n-a}{n+1}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\frac{n(a-\bar{x}_n)}{n+1}\right]^2=$$

$$\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2-\frac{n}{2}\left[\frac{\bar{x}_n-a}{n+1}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{n(a-\bar{x}_n)}{n+1}\right]^2=$$

$$\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2+\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}(\bar{x}_n-a)^2。$$

这样，就可以根据整机试验子样$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$、先验等价转换过来的单个整机样本信息$a$、以及相应的先验分布参数$\alpha,\beta$，推导得到正态逆伽玛分布的后验参数$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$，由此计算出后验的评估结果。

3　案例分析

整机试验的精度评估中有

1）50个分部件折合得到的先验样本，其均值和方差为$\bar{x}_0=264.6$，$\sigma_{x_0}=487.9$。

2）10个整机样本：$x_0=\{700,567,917,231,455,322,336,-742,-616,-749\}$，计算得到实际整机样本的均值和方差为$\bar{x}_1=142.1$，$\sigma_{x_1}=616.3$。

如果不考虑先验信息的可信度较差，直接与整机试验信息进行融合评估，可得出此时的均值为244.2，方差为507.8，这个结果更接近先验样本的均值和方差。

如果考虑先验信息的可信度较差，将其等价为单个实际整机样本，根据上文推导的Bayes公式与整机试验信息进行融合评估，则结合先验分布信息和相应的参数推导公式可以算出，相应的后验均值的点估计为159.7，后验方差的点估计为577.6。在0.8的置信度下，相应的后验均值的置信区间为[−62. 6，380.4]，后验方差的置信区间为[441.9，738.4]。这个结果相当于给实际整机样本信息自动设置了较大的融合权重，认为整机样本的测试数据比先验信息更符合真正的分布。

4　结语

信息的充分利用对于小子样试验评估是非常重要的。正态－逆Gamma分布形式经常应用于命中精度服从的共轭分布假设。本文的公式推导对于小子样评估有实际应用价值，这种方法开拓了融合先验信息的加权Bayes方法的思路，是有其合理性和实用性的。

参考文献：

[1]　张金槐，唐雪梅. Bayes方法[M]. 修订版. 长沙：国防科技大学出版社，1993：1−3，54−57.

Zhang Jinhuai，Tang Xuemei. Bayes Method[M]. 2nd Version. Changsha：National University of Defense

Technology Press，1993：1-3，54-57.

[2] 唐雪梅，张金槐，邵凤昌，等. 武器装备小子样试验分析与评估[M]. 北京：国防工业出版社，2001：1-3.
Tang Xuemei，Zhang Jinhuai，Shao Fengchang，et al. Test Analysis and Evaluation of Weapon Systems in Small-Sample Circumstances[M]. Beijing：National Defence Industry Press，2001：1-3.

[3] 段晓君，黄寒砚. 基于信息散度的补充样本加权融合评估[J]. 兵工学报，2007，28(10)：1276-1280.
Duan Xiaojun，Huang Hanyan. Weighted Bayesian Fusion Evaluation Based on Information Divergence of Prior Sample [J]. Acta Armamentarii，2007，28(10)：1276-1280.

[4] 段晓君，王 刚. 基于复合等效可信度加权的Bayes融合评估方法[J]. 国防科技大学学报，2008，30(3)：90-94.
Duan Xiaojun，Wang Gang. Weighted Bayesian Fusion Evaluation Basing on Composite Equivalency Model[J]. Journal of National University of Defense Technology，2008，30(3)：90-94.

[5] 冯蕴雯，黄 玮，吕震宙，等. 极小子样试验的半经验评估方法[J]. 航空学报，2004，25(9)：456-459.
Feng Yunwen，Huang Wei，Lv Zhenzhou，et al. The Semiempirical Evaluation Method for Extreme Small Sample Test[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica，2004，25 (9)：456-459.

[6] 赵 亮，李积源. 基于Bayes理论的小子样维修性试验与评定研究[J]. 舰船电子工程，2006，26(1)：113-117.
Zhao Liang，Li Jiyuan. Research on Small Example Maintainability Experimentation and Evaluation of Bayes-Based Theory[J]. Ship Electronic Engineering，2006，26(1)：113-117.

（责任编辑：张亦静）

（上接第 11 页）

推论 4 设$f(x)$在点a的某邻域有一阶连续导数，且$f'''(a)\neq 0$，则对上式中的ξ有：

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}。$$

参考文献：

[1] 胡晶地. 中值定理“中间点”的渐近性态[J]. 高等数学研究，2009，12(1)：52-54.
Hu Jingdi. Asymptotic Properties of Intermediate Point on the Mean Value Theorem[J]. Studies in College Mathematics，2009，12(1)：52-54.

[2] 戴立辉，吴 亭. 积分第一中值定理中间点的渐近性[J]. 闽江学院学报，2009，30(2)：24-29.
Dai Lihui，Wu Ting. Asymptotic Properties of Intermediate Point on the First Mean Value Theorem for Integral[J]. Journal of Minjiang University，2009，30(2)：24-29.

[3] 吴至友，夏 雪. 积分第二中值定理“中间点”的渐近性[J]. 数学的实践与认识，2004，34 (3)：170-176.
Wu Zhiyou，Xia Xue. On the Second Mean Value Theorem for Integrals[J]. Mathematics in Practice and Theory，2004，34 (3)：170-176.

[4] 张树义. 广义Taylor公式“中间点”一个更广泛的渐近估计式[J]. 数学的实践与认识，2004，34(11)：171-176.
Zhang Shuyi. A More Extensive Asymptotic Estimation Formula of the “Intermediate Point” in the Generalized Taylor Formula[J]. Mathematics in Practice and Theory，2004，34 (11)：171-176.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析（上）[M]. 北京：高等教育出版社，1996.
The Department of mathematics of East China Normal University. Mathematical Analysis[M]. Beijing：Higher Education Press，1996.

（责任编辑：廖友媛）