复合 Poisson-Geometric 过程的性质及简单应用

蔡秋娥，廖基定

（南华大学 数理学院，湖南 衡阳 421001）

摘　要：引入了复合 Poisson- Geometric 记数过程，利用概率论与随机过程的计算方法，得到了复合 Poisson-Geometric 过程的特征函数、矩母函数、期望、方差等性质，较好地刻画了 Poisson-Geometric 过程的一些数字特征，提供了研究 Poisson-Geometric 过程的理论依据，并阐述了其应用。

关键词：Poisson-Geometric 过程；风险模型；性质；应用

中图分类号：O211.67　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673–9833(2010)01–0040–03

The Properties of Compound Poisson-Geometric Process and Its Applications

Cai Qiue，Liao Jiding

（School of Mathematics and Physics，University of South China，Hengyang Hunan 421001，China）

Abstract: Introduces the compound Poisson-Geometric process. By applying probability theory and the calculation of stochastic processes, obtains the process's eigenfunction, moment generating function, mathematical expectation and variance and depicts its numerical features. Provides the theoretical basis for reasearch of compound Poisson-Geometric process and elaborates its application.

Keywords: Poisson-Geometric process; ruin model; properties; applications

0　引言

破产理论是用数学模型来描述和研究保险公司面临风险的一门学科，使用随机过程理论中的相关过程描述保险公司经营过程，并研究保险公司的生存概率、破产概率、破产时间以及破产前最大盈余分布等等。经典的风险模型通常定义如下：设保险公司具有一定的初始资本，允许其在符合法律法规的范围内，承保具有某种统计分布的风险，并根据风险的特点连续地或离散地收取相应的保费。

经典风险模型为：$U(t)=u+ct-\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$，

式中：$u>0$ 称为初始准备金；

$c>0$ 为保险公司单位时间内的保费收入；

$N(t)$表示在时段$[0,t]$内保险公司总索赔次数，一般假设$\{N(t)\}_{t\geq 0}$服从参数为λ的 Poisson 过程；

Y_k 为第 k 次索赔量，$\{Y_k\}$是独立同分布非负值随机变量列，并设$\{N(t)\}_{t\geq 0}$与$\{Y_k\}$独立。

在经典的风险模型中，风险事件和赔付事件是等价的，用来描述风险事件和赔付事件的计数过程是同一随机过程，主要使用的是齐次 Poisson 过程[1]。但在实际的保险事务中，例如存在免赔额的情形下，风险事件和赔付事件有可能是不等价的。2005 年由毛泽春、刘锦萼等引入的复合 Poisson- Geometric 记数过程能较好地刻画这种情况[2]，本文主要讨论复合 Poisson-Geometric 记数过程的主要性质及其简单应用。

1　复合 Poisson-Geometric 过程的描述

设随机变量 X 为个体保单在单位时间内发生的事故次数，且$P(X=0)=1-\delta,(0<\delta<1),P(X\geq 1)=\delta$。又

收稿日期：2009-09-11

通信作者：蔡秋娥（1980-），女，湖南攸县人，南华大学教师，硕士研究生，主要研究方向为数理统计，
E-mail：liaojiding@163.com

设随机变量 Y 为保单在单位时间内实际赔付次数，一般来说，$P(Y=0)$ 要比 $P(X=0)$ 大，同时 $P(Y\ge 1)$ 比 $P(X\ge 1)$ 要小。设 $P(Y=0)=1-\delta+\delta\rho$，则有 $P(Y\ge 1)=\delta(1-\rho)$，$\rho\in(0,1)$，称 ρ 为偏离参数。由于

$$P(Y\ge 1)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(1-\rho)^2\rho^{k-1}=\delta(1-\rho),$$

若记 $P(Y=k)=\delta(1-\rho)^2\rho^{k-1}$，$\pi=\delta(1-\rho)$，则 Y 的分布为：

$$\begin{cases} P(Y=0)=1-\pi, \\ P(Y=k)=\delta(1-\rho)^2\rho^{k-1},\ k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

计算可得 Y 的母函数为：

$$G_Y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k P(Y=k)=1-\frac{\pi(1-t)}{1-\rho t}。\tag{2}$$

设随机变数 $\zeta_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 独立，且服从式（2）给定的分布，则 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\zeta_k$ 的母函数为：

$$G_{S_n}(t)=\left[1-\frac{\pi(1-t)}{1-\rho t}\right]^n, \tag{3}$$

根据概率论中的泊松定理，取 $n\to\infty$，$\pi\to 0$，$n\pi\to 0$，得到：

$$G_{S_n}(t)\to G(t)=\exp\left(\frac{\lambda(1-t)}{1-\rho t}\right), \tag{4}$$

根据式（4）给出以下定义[3]。

定义 1　称母函数 $\exp\left(\frac{\lambda(1-t)}{1-\rho t}\right)$ 所对应的分布为复合 Poisson-Geometric 分布，记为 $PG(\lambda,\rho)$，其中 $\lambda>0$，$0\le\rho<1$。

定义 2　设 $\lambda>0$，$0\le\rho<1$，称 $\{N(t),t\ge 0\}$ 为参数 λ,ρ 的复合 Poisson-Geometric 过程，如果满足：

1）$N(0)=0$；

2）$\{N(t),t\ge 0\}$ 具有独立平稳增量；

3）对 $t>0$ 有 $N(t)\sim PG(\lambda t,\rho)$，且 $E[N(t)]=\frac{\lambda t}{1-\rho}$，$\mathrm{Var}[N(t)]=\frac{\lambda t(1+\rho)}{1-\rho}$。

由定义 2 知，当 $\rho=0$ 时，复合 Poisson-Geometric 过程就是 Poisson 过程，因此，复合 Poisson-Geometric 过程是 Poisson 过程的一种推广。

2　主要结果及证明

定义复合过程 $X(t)$ 为：$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，其中 $\{N(t),t\ge 0\}$ 为具有独立平稳增量的计数过程；Y_i 之间独立分布，而且与 $\{N(t)\}$ 独立，设其密度函数为 $f_Y(y)$，分布函数为 $F_Y(y)$，矩母函数为 $M_Y(r)$，并设每次索赔额 $Y_i\ge 0$，则可得：

性质 1　复合过程 $X(t)$ 是独立增量过程。

证明　令 $0\le t_0<t_1<\cdots<t_n$，则

$$X(t_k)-X(t_{k-1})=\sum_{i=N_{(t_{k-1})}}^{N(t_k)}Y_i,$$

由条件 $\{N(t),t\ge 0\}$ 为具有独立平稳增量的计数过程，Y_i 之间独立分布，而且与 $\{N(t)\}$ 独立，不难验证 $X(t)$ 具有独立增量性。

性质 2　$X(t)$ 的特征函数为：

$$g_{X(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\},$$

式中：$g_Y(u)$ 是随机变数 Y_i 的特征函数；

λ 是事件的到达率；

$X(t)$ 矩母函数为 $M_{X(t)}(r)=\exp\left(\frac{\lambda(M_Y(r)-1)}{1-\rho M_Y(r)}\right)$。

证明　$X(t)$ 的特征函数为：

$$\begin{aligned} g_{X(t)}(u)&=E\left[e^{iuX(t)}\right]= \\ &\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iuX(t)}\middle|N(t)=n\right]P\{N(t)=n\}= \\ &\sum_{n=0}^{\infty}E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{n}Y_k}\middle|N(t)=n\right]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}= \\ &\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\exp\left(iu\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)\right]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}= \\ &\sum_{n=0}^{\infty}[g_Y(u)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}= \\ &\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}, \end{aligned}$$

$X(t)$ 矩母函数为：

$$\begin{aligned} M_{X(t)}(r)&=E\left[e^{rX(t)}\right]=E\left[E\left[e^{rX(t)}\middle|N(t)\right]\right]= \\ &E\left[M_Y(r)\right]^{N(t)}=\exp\left(\frac{\lambda(M_Y(r)-1)}{1-\rho M_Y(r)}\right)。\end{aligned}$$

性质 3　$X(t)$ 的数学期望和方差分别为：

$$E[X(t)]=\frac{\lambda t}{1-\rho}E(Y_1),$$

$$D[X(t)]=\frac{\lambda}{1-\rho}\left[E(Y_1^2)+\frac{2\rho(EY_1)^2}{1-\rho}\right]。$$

证明　由条件期望的性质

$$E[X(t)]=E\{E[X(t)|N(t)]\},$$

可知 $X(t)$ 的数学期望为：

$$E\left[X(t)\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i\middle|N(t)=n\right]=$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=nE(Y_1),$$

所以

$$E(X(t))=E\{E[X(t)|N(t)]\}=$$

$$E[N(t)]E(Y)=\frac{\lambda t}{1-\rho}E(Y_1).$$

同理可得$X(t)$的方差为：

$$D[X|N(t)]=N(t)D[Y_1].$$

$$D[X(t)]=E\{N(t)D[Y_1]\}+D\{N(t)E[Y_1]\}=$$

$$E[N(t)]D[Y_1]+D[N(t)](EY_1)^2=$$

$$\frac{\lambda tE[Y_1]}{1-\rho}\left\{E\left[Y_1^2\right]-(EY_1)^2\right\}+\frac{\lambda(1+\rho)}{(1-\rho)^2}(EY_1)^2-$$

$$\frac{\lambda}{1-\rho}\left[E\left(Y_1^2\right)+\frac{2\rho(EY_1)^2}{1-\rho}\right].$$

3 复合Poisson-Geometric过程的简单应用

近年来，新版车险在车损险条款中引入了免赔额制度，有的保险公司不再对200元以下的车险赔案进行理赔，超过200元的赔案只赔200元以上的部分。在这样的制度背景下，风险事件和赔付事件有可能不是等价的，这就需要研究者将经典的Poisson风险模型在赔付过程方面进行推广，以更好地描述和研究保险公司的生存概率、破产概率、破产时间以及破产前最大盈余分布等问题。

复合Poisson-Geometric过程较好地刻画了具有免赔额的情形，很多学者对此模型开展了应用研究，给出了此模型的破产概率公式及更新方程。当索赔额服从指数分布时，毛泽春，刘锦萼给出了破产概率的显式表达式；熊双平讨论了常利率下索赔次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型的破产概率和罚金函数，得到了此特例下该过程破产概率和罚金函数的期望所满足的积分方程[4]；廖基定等学者研究了Poisson-Geometric风险模型破产概率的上界估计问题[5]，得到了Gerber-Shiu折现惩罚期望所满足的更新方程，在此基础上推导了破产概率所满足的更新方程，且根据Pollazek-Khinchin公式直接得到了当索赔额服从指数分布情形下破产概率的显性表达式[6]。

参考文献：

[1] 邓永录，梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京：科学出版社，1992：12.
Deng Yonglu, Liang Zhishun. Random Point Processes and Its Application[M]. Beijng：Science Press, 1992：12.

[2] 毛泽春，刘锦萼. 索赔次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型及破产概率[J]. 应用数学学报，2005，28(3)：419-428.
Mao Zechun, Liu jin′e. A Risk Model and Probability with Compound Poisson-Geometric Process[J]. Acta Mathematicae Applicae Sinica，2005，28(3)：419-428.

[3] 刘次华. 随机过程[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2004：8，27-41.
Liu Cihua. Stochastic Processes[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2004：8，27-41.

[4] 熊双平. 索赔次数为复合Poisson-Geometric过程的常利率风险模型的罚金函数[J]. 经济数学学报，2008，25(2)：137-142.
Xiong Shuangping. On the Penalty Function of the Compound Poisson-Geometric Process Risk Model with a Constant Interest Rate[J]. Mathematics in Economics, 2008, 25(2)：137-142.

[5] 廖基定，刘再明，龚日朝. 赔付次数为复合Poisson-Geometric过程的风险模型破产概率上界估计[J]. 南华大学学报，2008，22(3)：8-11.
Liao Jiding, Liu Zaiming, Gong Rizhao. The Upper Bounded Estimate of the Ruin Probability with Compound Poisson-Geometric Process[J]. Journal of University of South China, 2008, 22(3)：8-11.

[6] 廖基定，龚日朝，刘再明，等. 复合Poisson-Geometric风险模型Gerber-Shiu折现惩罚函数[J]. 应用数学学报，2007，30(6)：1076-1085.
Liao Jiding, Gong Rizhao, Liu Zaiming, et al. The Gerber-Shiu Discounted Penalty Function with Poisson-Geometric Risk Model[J]. Acta Mathematicae Applicae Sinica，2007，30(6)：1076-1085.

（责任编辑：罗立宇）