一类非线性发展方程整体弱解的存在性

杨　莉，谢永钦

（长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410076）

摘　要：研究了一类非线性方程的初边值问题。利用Galerkin方法，结合能量估计及分析技巧，证明了该类方程整体弱解的存在性及稳定性，其中，非线性项满足临界指数增长条件。并对此类问题已有的研究结果做了较大的改进。

关键词：非线性发展方程；初边值问题；整体弱解；Galerkin 方法

中图分类号：O151.2　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0036-04

Existence of Global Weak Solution for a Class of Nonlinear Evolution Equation

Yang Li，Xie Yongqin

（School of Mathematics and Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410076，China）

Abstract：Studies the initial boundary value problem of a new nonlinear evolution equation. Obtains existence and stability of global weak solution by means of Galerkin method associating with energy estimate and analysis technique，in which the nonlinear term satisfies critical conditions of exponential growth. And makes a large improvement on the findings of such problems.

Keywords：non linear evolution equation; initial boundary value problem; global weak solutions; Galerkin methods

0　引言

本文考虑如下一类非线性发展方程初边值问题：

$$\begin{cases} \left(|u_t|^{r-2}u_t\right)_t - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + f(u) = g(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \Omega, t > 0; & (1) \\ u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t \ge 0; & (2) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega. & (3) \end{cases}$$

其中，$r \ge 3$，$\Omega \subset R^N$ 具有适当光滑边界$\partial\Omega$的有界区域，$u(x，t)$为未知函数，$f \in C^1(R)$为给定的满足适当条件的非线性项，$g \in L^2(\Omega)$为给定泛函。

其中，方程（1）不仅在偏微分方程的一般理论中是有意义的，而且在数学物理中有广泛应用，其最典型的一个应用是描述弹性杆的纵向波传播方程[1]，即

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u = f,$$

又如，用于描述跨声速区域可压缩气体流动的Karman方程[2]：$u_t u_{tt} - u_{xx} = 0$。

在r=2时，已有许多文献对方程（1）~（3）进行了研究。如文献[3]中，作者研究了其强解的存在性和渐近性；文献[4-7]研究了整体解的存在性和不存在性；文献[8]研究了$u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f(u)$方程的渐近稳定性；文献[9]利用位势阱方法，在小初值情形下，证明了方程（1）~（3）整体弱解的存在性，并得到了整体弱解的稳定性。但至今还未发现对于方程（1）~（3）较完整的研究。

本文利用Galerkin方法、结合能量估计和分析技巧，证明方程（1）~（3）的整体弱解的存在性，并得到其解是唯一性连续的，且依赖于初始值。

本文用$|\bullet|_r$、$\|\bullet\|_H$分别表示空间$L^r(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)$的范

收稿日期：2009-10-12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10571178），湖南省教育厅基金资助项目（06C103）
通信作者：杨　莉（1980-），女，河南焦作人，长沙理工大学硕士研究生，主要研究方向为动力系统，
E-mail: yangli9849@163.com

数；$(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积；$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示Banach空间 X 中元素和其对偶空间 X^* 中元素的对偶积；用 C 记任意正常数，在不同的行中，甚至同一行中，C 所表示的正常数可能不同。

设非线性项 f 满足如下假设条件：

$$H_1 \quad f\in C^1(R),\quad |f'(s)|\le C\left(1-|s|^{p-1}\right); \tag{4}$$

$n=1,2$时，$1\le p<+\infty$；$n\ge 3$时，$1\le p\le \dfrac{n+2}{n-2}$。

$$H_2 \quad f'(s)\ge -l,\quad \forall s\in R。 \tag{5}$$

记 $F(s)=\int_0^s f(\rho)\mathrm{d}\rho$，$k_0=\max\{l,0\}$，则存在常数 $k_1,k_2\ge 0$，使得：

$$f(s)s\ge -k_0 s^2-k_1； \tag{6}$$

$$F(s)\ge -\frac{1}{2}k_0 s^2-k； \tag{7}$$

$$记\ F_1(s)=F(s)+\frac{1}{2}k_0 s^2+k_2>0。 \tag{8}$$

1　整体弱解的存在性

设 $\{\omega_j\}$ 为 $-\Delta$ 在 $L^2(\Omega)$ 中的一组标准特征向量函数，则有 $(\omega_j,\omega_k)=\delta_{jk}$，$j,k=1,2,\cdots$，并且满足 $-\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j$，$\omega_j|_{\partial\Omega}=0$，$j=1,2,\cdots$，$\lambda_j$ 为第 j 个特征值，与特征函数 ω_j 对应。于是，$\{\omega_j\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中构成正交基（但并非标准正交基）。

$$\langle\omega_j,\omega_k\rangle=(-\Delta\omega_j,\omega_k)=\lambda_j(\omega_j,\omega_k)=\lambda_j\delta_{jk},\ j,k=1,2,\cdots$$

对任意 $u\in H_0^1(\Omega)$，有 $u(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j(t)\omega_j$，

$$a_j(t)=(u(t),\omega_j),\ a_j'(t)=(u_t(t),\omega_j),$$

$$a_j''(t)=(u_{tt}(t),\omega_j),\ j=1,2,\cdots。$$

设问题（1）～（3）的近似解为

$$u_n(x,t)=\sum_{j=1}^{n}a_{jn}(t)\omega_j(x),\ n=1,2,\cdots。 \tag{9}$$

$E_n=\mathrm{span}\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$u_n\in E_n$，$P_n$ 为 $L^2(\Omega)$ 到 E_n 的正交投影，$P_n u=\sum_{j=1}^{n}(u,\omega_j)\omega_j$，由Galerkin方法，它应满足如下非线性常微分方程：

$$P_nAu_n-\Delta u_n-\Delta u_{nt}-\Delta u_{ntt}+P_nf(u_n)=P_ng(x), \tag{10}$$

$$u_n(0)=P_nu_0,\ u_{nt}(0)=P_nu_1,\ u_n|_{\partial\Omega}=0, \tag{11}$$

记 $Au=\left(|u_t|^{r-2}u_t\right)_t=(r-1)|u_t|^{r-2}u_{tt}$。

引理1　1）假设条件 H_1、H_2 成立；

2）$u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$，$u_1(x)\in H_0^1(\Omega)\cap L^r(\Omega)$，则对任意 $T>0$ 及式（10）、（11）的任意解 $u_n(x,t)$，$u_{nt}(x,t)$ 满足

$$|u_{nt}|_r^r+|u_{nt}|_0^2+\|u_{nt}(s)\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}+\|u_n\|_0^2+\int_\Omega F_1(u_n)\le M_1,$$

$$0\le t\le T, \tag{12}$$

其中：M_1 为与 n 无关的常数。

证明　以 u_{nt} 乘式（10）的两边，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{r-1}{r}|u_{nt}|_r^r+\frac{1}{2}\|u_n\|_0^2-\frac{1}{2}|u_{nt}|_0^2+\int_\Omega F(u_n)\right]+|u_{nt}|_0^2\le$$

$$\frac{1}{2}k_0|u_n|_2|u_{nt}|_2+k_1m(\Omega)T-\int_\Omega g(x)\cdot u_{nt}, \tag{13}$$

记 $H_n(t)=\dfrac{r-1}{r}|u_{nt}|_r^r+\dfrac{1}{2}\|u_n\|_0^2-\dfrac{1}{2}|u_{nt}|_0^2+\int_\Omega F(u_n)$，

$$则式（13）化为\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_n(t)\le\alpha H_n(t)+Q\left(T,|g|_2^2\right), \tag{14}$$

上式中：$\alpha=\max\left\{\dfrac{C}{2}k_0,1\right\}>0$，

$$Q\left(T,|g|_2^2\right)=k_2m(\Omega)T+C|g|_2^2。$$

由Gronwall引理，有

$$H_n(t)<\left(H_n(0)+\frac{Q\left(T,|g|_2^2\right)}{\alpha}\right)\exp\{\alpha t\}-\frac{Q\left(T,|g|_2^2\right)}{\alpha} \tag{15}$$

对一切 $0\le t\le T$ 成立。而 $P_nu_0\xrightarrow{H_0^1}u_0$，$P_nu_1\xrightarrow{H_0}u_1$，$P_nu\xrightarrow{L^r}u_1$，$n\to+\infty$。又由 f 的连续性，有 $F_1(u_n(x,0))\to F_1(u_0)$，因此，存在一个正函数 Q_1，使得 $|H_n(0)|\le Q_1(\|u_0\|,\|u_1\|)$，则

$$\|u_{nt}\|_r^r+|u_{nt}|_0^2+|u_n|_0^2+\int_\Omega F_1(u_n)\le M_0,\forall\, 0\le t\le T, \tag{16}$$

其中：$M_0=(Q+Q)\exp(\alpha T)$，再以 u_{nt} 乘式（10）的两边，两边对 t 从0到 T 积分，易得式（17）：

$$\|u_{nt}(s)\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\le M_{11},\forall\, 0\le t\le T, \tag{17}$$

记 $M_1=M_0+M_{11}$，结合式(15)、（16），则有

$$|u_{nt}|_r^r+\|u_{nt}\|_0^2+\|u_n\|_0^2+\int_\Omega F_1(u_n)+|u_{nt}(s)|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\le M_1。$$

证毕。

引理2　设引理1各项假设成立，$u_n(x,t)$ 为式（10）、（11）的任意解，则对任一 $T>0$，有 $\|u_{ntt}\|_0^2\le M_2$，$0\le t\le T$ 成立。其中，M_2 为与 n 无关的常数。

证明　以 u_{ntt} 乘式（10）的两边，由分部积分有

$$\|u_{ntt}\|_0^2\le\int_\Omega|\nabla u_n||\nabla u_{ntt}|+\int_\Omega|\nabla u_{nt}||\nabla u_{ntt}|+$$

$$\int_\Omega|f(u_n)||u_{ntt}|+\int_\Omega|g(x)||u_{ntt}|, \tag{18}$$

由Young不等式及Holder不等式

$$\int_\Omega|\nabla u_n||\nabla u_{ntt}|\le 2\|u_n\|_0^2+\frac{1}{8}\|u_{ntt}\|_0^2, \tag{19}$$

$$\int_\Omega|\nabla u_{nt}||\nabla u_{ntt}|\le 2|u_{nt}|_0^2+\frac{1}{8}|u_{ntt}|_0^2。 \tag{20}$$

结合Sobolev嵌入定理，

$$\int_\Omega|f(u_n)||u_{ntt}|\le C_{T,k}(\Omega)+C|u_n|_0^{2p}+\frac{1}{8}\|u_{ntt}\|_0^2, \tag{21}$$

综上，由式（18）得

$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|_0^2 \le 2\|u_n\|_0^2 - C|u_n|_0^{2p} + 2\|u_{nt}\|_0^2 + C\|g(x)\|^2 + C_{u_0,u_1}(\Omega)$,

设$\frac{1}{2}M_2 = 2|u_n|_0^2 + C|u_n|_0^{2p} + 2|u_{nt}|_0^2 + C\|g(x)\|^2 + C_{u_0u_1}(\Omega)$,

故$\|u_{mt}\|_0^2 \le M_2$ 成立。证毕。

定理 1 设$\Omega \subset R^n$为有界域，假设 H_1、H_2 成立，$u_0(x)$、$u_1(x) \in H_0^1$（Ω），$g \in L^2$（Ω）。则对任意的 $T > 0$，问题（1）~（3）存在如下意义的弱解 u（x，t）：

u, $u_{tt} \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$;

$u_t \in L^r\left(0, T; L^r(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$,

对一切$\varphi \in H_0^1(\Omega)$有

$\langle Au - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + f(u) - g(x), \varphi \rangle = 0$。

对于 $t \in [0, T]$几乎处处成立，且$u|_{t=0} = u_0(x)$，$u_t|_{t=0} = u_1(x)$于$H_0^1(\Omega)$。

证明 对任一 $T > 0$，由常微分方程组的标准理论知，问题（10）、（11）存在$[0, T]$上的解 u_n（x，t）。由引理1、2知，$\{u_n(x,t)\}$，$\{u_{nt}(x,t)\}$，$\{u_{ntt}(x,t)\}$ 都在 $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$上有界。由自反性和紧性定理（参见文献[10]），存在$\{u_n(x,t)\}$的子序列$\{u_\nu(x,t)\}$，使得

$u_\nu(x,t) \to u(x,t)$于$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$弱收敛；

$u_{\nu t}(x,t) \to u_t(x,t)$于$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$弱收敛；

$u_{\nu tt}(x,t) \to u_{tt}(x,t)$于$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$弱收敛。

抽取$\{u_n\}$的子序列，不妨仍记为$\{u_\nu\}$，则$u_\nu(x,t) \to u(x,t)$于$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$强收敛；且$u_\nu(x,t) \to u(x,t)$于$\Omega \times [0,T]$上几乎处处成立。其中，用到如下简单结论：

若$u_k \to u$于$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$弱收敛，且$u_{kt} \to v$于$L^2\left(0,T;H_0^{-1}(\Omega)\right)$弱收敛，则 $u_t = v$。

取$\begin{cases} q = 2, & n \le 2; \\ q = \frac{2n}{n+2}, & n \ge 3. \end{cases}$ 因此，$pq < \frac{2n}{n-2}$，由式（4），

$\|f(u_n)\|^q_{L^q(0,T;L^q(\Omega))} \le C\int_0^T\left(\int_\Omega\left(1+|u_n|^p\right)^q \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \le$

$C\int_0^T\left(\int_\Omega\left(1+|u_n|^{pq}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$，

而 u_n 在$L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$中一致有界，故$f(u_n)$ 在$L^q\left(0,T;L^q(\Omega)\right)$中关于$n$一致有界。

设$f(u_\nu) \to \eta$ 于$L^q\left(0,T;L^q(\Omega)\right)$中弱收敛；由于$f(u) \in C^1(R)$，且 $u_\nu(x,t) \to u(x,t)$于$\Omega \times [0,T]$ 上几乎处处成立；则 $f(u_\nu(x,t)) \to f(u(x,t))$ $(\nu \to \infty)$ 于 $\Omega \times [0,T]$ 上几乎处处成立；可得 $f(u_\nu(x,t)) \to f(u(x,t))$ 于 $L^q(0,T;L^q(\Omega))$ 中弱收敛；因此$\eta = f(u(x,t))$。

并且：$\Delta u_\nu \to \Delta u$于$L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$弱 * 收敛；

$\Delta u_{\nu t} \to \Delta u_t$于$L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$弱 * 收敛；

$\Delta u_{\nu tt} \to \Delta u_{tt}$于$L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$弱 * 收敛。

由式（10）有：$Au_n = \Delta u_n + \Delta u_{nt} + \Delta u_{ntt} - f(u_n) + g(x)$，

由引理1、2可知，$\{Au_n\}$在$L^s\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$中关于$n$一致有界（$s = \min\{2, q\}$），故存在$\{Au_n\}$的子序列$\{Au_\nu\}$，使得$Au_\nu \to Au$于$L^s\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$中弱 * 收敛，取$N = \nu \to \infty$，由于$\{\omega_j(x)\}$在$H_0^1(\Omega)$中稠密，即对任意的

$\Psi \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$有：

$\int_0^T \langle Au - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + f(u) - g(x), \Psi \rangle = 0$

在$L^s\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$中成立。从而由 Ψ 的任意性可得，对任意的$\varphi \in H_0^1(\Omega)$，$t \in [0,T]$几乎处处有

$\langle Au - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + f(u) - g(x), \varphi \rangle = 0$。

为证明 $u(x, t)$为问题（1）~（3）的一个弱解，还需要验证初值条件$u|_{t=0} = u_0(x)$，$u_t|_{t=0} = u_1(x)$于$H_0^1(\Omega)$成立。但基于上述估计，这可由标准的方法得到（参见文献[11]）。在此省略具体证明过程，故 $u(x, t)$为问题（1）~（3）满足初边值条件$u_0(x)$，$u_1(x) \in H_0^1(\Omega)$的整体解。证毕。

2 唯一性与稳定性结论

定理 2 在定理1的条件下，问题（1）~（3）的弱解是唯一的，且连续依赖于初值。

证明 设 u，v 分别为问题（1）~（3）对应于初边值条件（u_0，u_1），（v_0，v_1）的2个解。令 $w = u - v$，则 w 满足下面的初边值问题

$$\begin{cases} Au - Av - \Delta w - \Delta w_t - \Delta w_{tt} + f(u) - f(v) = 0, \\ \qquad x \in \Omega, t > 0; & (22) \\ w|_{\partial\Omega} = 0; & (23) \\ w|_{t=0} = u_0 - v_0, w_t|_{t=0} = u_1 - v_1, \quad x \in \Omega。 & (24) \end{cases}$$

以 w_t 乘式（22）得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|_0^2 + |w_t\|_0^2\right) + \|w_t\|_0^2 = -\langle f(u) - f(v), w_t \rangle - \langle Au - Av, w_t \rangle. \qquad (25)$$

$-\langle f(u) - f(v), w_t \rangle \le \int_\Omega |f(u) - f(v)||w_t| \le$

$C\int_\Omega\left(1 + |u|^p - |v|^p\right)|w||w_t| \le C\left(1 + |u\|_0^p + \|v\|_0^p\right)\left(|w\|_0^2 + |w_t\|_0^2\right)$;

$-\langle Au - Av, w_t \rangle =$

$-(r-1)\left\langle u_{tt}\left(|u_t|^{r-2} - |v_t|^{r-2}\right) + |v_t|^{r-2} w_{tt}, w_t \right\rangle \le C(r-1) \cdot$

$\int_\Omega\left(|u_t|^{r-3} + |v_t|^{r-3}\right)|w_t|^2|u_{tt}| + C(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_t||w_{tt}|$，

而$\int_\Omega |u_t|^{r-3}|w_t|^2|u_{tt}| \le$

$$\left(\int_\Omega |w_t|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}\left(\int_\Omega |u_t|^{\frac{n(r-3)}{2}}|u_{tt}|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} \le C|u_{tt}\|_0\|u_t\|_0^{r-3}|w_t\|_0^2;$$

同理，$\int_\Omega |v_t|^{r-3}|w_t|^2|u_{tt}| \le C\|u_{tt}\|_0 |v_t|_0^{r-3}\|w_t\|_0^2$；

又$\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_t||w_{tt}| \le C\|v_t\|_0^{r-2}\|w_t\|_0\|w_{tt}\|_0 \le$

$$C\|v_t\|_0^{2(r-2)}\|w_t\|_0^2+\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2;$$

所以$-\langle Au-Av, w_t\rangle \le C\left(\|u_t\|_0^{r-3}+\|v_t\|_0^{r-3}\right)\|u_{tt}\|_0\|w_t\|_0^2+$

$$C\|v_t\|_0^{2(r-2)}\|w_t\|_0^2+\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2 。$$

由引理 1、2，式（25）可化为：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|_0^2-\|w_t\|_0^2\right)-\|w_t\|_0^2 \le C\left(\|w\|_0^2+\|w_t\|_0^2\right)+\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2 。\tag{26}$$

以 w_{tt} 乘式（22）得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_t\|_0^2+\|w_{tt}\|_0^2=-\langle f(u)-f(v), w_{tt}\rangle-\langle Au-Av, w_{tt}\rangle-(\nabla w, \nabla w_{tt}) 。\tag{27}$$

而$-\langle f(u)-f(v), w_{tt}\rangle \le \int_\Omega |f(u)-f(v)||w_{tt}| \le$

$$C\int_\Omega\left(1+|u|^p+|v|^p\right)|w||w_{tt}| \le C\|w\|_0^2+\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2,\tag{28}$$

$-\langle Au-Av, w_{tt}\rangle=-(r-1)\langle |u_t|^{r-2}u_{tt}-|v_t|^{r-2}v_{tt}, w_{tt}\rangle=$

$-(r-1)\left\langle u_{tt}\left(|u_t|^{r-2}-|v_t|^{r-2}\right)+|v_t|^{r-2}w_{tt}, w_{tt}\right\rangle \le C(r-1)\cdot$

$\int_\Omega\left(|u_t|^{r-3}-|v_t|^{r-3}\right)|u_{tt}||w_t||w_{tt}|-C(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_{tt}|^2$，

而$\int_\Omega |u_t|^{r-3}|u_{tt}||w_t||w_{tt}| \le C|u_t|_0^{r-3}|w_t|_0\|w_{tt}\|_0$，

$\int_\Omega |v_t|^{r-3}|u_{tt}||w_t||w_{tt}| \le C\|v_t\|_0^{r-3}\|w_t\|_0\|w_{tt}\|_0$，

因此

$-\langle Au-Av, w_{tt}\rangle \le C(r-1)\left(\|u_t\|_0^{r-3}+\|v_t\|_0^{r-3}\right)\|w_t\|_0\|w_{tt}\|_0-$

$C(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_{tt}|^2 \le C\|w_t\|_0\|w_{tt}\|_0-$

$C(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_{tt}|^2 \le C\|w_t\|_0^2+$

$$\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2-C(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_{tt}|^2;\tag{29}$$

$$-(\nabla w, \nabla w_{tt}) \le \int_\Omega |\nabla w||\nabla w_{tt}| \le \|w\|_0\|w_{tt}\|_0 \le C\|w\|_0^2+\frac{1}{4}\|w_{tt}\|_0^2,\tag{30}$$

由式（28）~（30），式（27）可化为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_t\|_0^2+\|w_{tt}\|_0^2+(r-1)\int_\Omega |v_t|^{r-2}|w_{tt}|^2 \le C\left(\|w\|_0^2-\|w_t\|_0^2\right)+\frac{3}{4}\|w_{tt}\|_0^2 。\tag{31}$$

结合式（26）、（31）可得

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|_0^2-\|w_t\|_0^2\right) \le K\left(\|w\|_0^2+\|w_t\|_0^2\right)$，$K$为正常数。

由 Gronwall 引理得：

$\|w\|_0^2-\|w_t\|_0^2 \le \left(\|w(0)\|_0^2+\|w_t(0)\|_0^2\right)e^{Kt}, \forall t\in[0,T]$,

显然，若$u_0=v_0$，$u_1=v_1$，则$w=w_t=0$，故解的唯一性得证。

参考文献：

[1] Love A H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity [M]. New York：Dover，1964.

[2] Ferreira J，Larkin N A. Global Solvability of A Mixed Problem for A Nonlinear Hyperbolic 2 Parabolic Equation in Noncylindrical Do 2 Mains[J]. Portugaliae Math，1996，53 (3)：381-395.

[3] 尚亚东. 方程$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u)$的初边值问题[J]. 应用数学学报，2000，23(3)：385-393.
Shang Yadong. Initial Boundary Value Problem of Equation $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\Delta u_{tt}=f(u)$ [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2000，23(3)：385-393.

[4] Wang Shubin，Chen Guowang. Existence and Nonexistence of Global Solutions for Nonlinear Hyperbolic Equation of Higher Order[J]. Comment. Math Univ Carolinae，1995，36 (3)：475-487.

[5] 陈国旺，王书彬，张宏伟. n 维 IMBq 方程的初边值问题[J]. 数学年刊 A 辑：中文版，2001，22A(4)：453-460.
Cheng Guowang，Wang Shubin，Zhang Hongwei. The Initial Boundary Value Problem for n-Dimensional Generalized IMBq Equation[J]. Chinese Annals of Mathematics：Series A，2001，22A(4)：453-460.

[6] 张宏伟，呼青英. 一类非线性双曲方程整体弱解的存在性和不存在性[J]. 工程数学学报，2003，20 (3)：131-134.
Zhang Hongwei，Hu Qingying. Existence and Nonexistence of Global Solutions for A Class of Nonlinear Hyperbolic Equations[J] . Chinese Journal of Engineering Mathematics，2003，20 (3)：131- 134.

[7] 谢永钦，杨　莉，秦桂香. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 湖南大学学报：自然科学版，2007，34 (5)：58- 61.
Xie Yongqin，Yang Li，Qin Guixiang. Strain Solitary Waves in A Nonlinear Elastic Rod[J]. Journal of Hunan University：Natural Sciences，2007，34 (5)：58- 61.

[8] Webb G. Existence and Asymptotic Behavior for A Strongly Damped Nonlinear Wave Equation[J]. Canad. J. Math.,1980，32(3)：631-643.

[9] 张宏伟，呼青英. 一类非线性发展方程整体弱解的存在性和稳定性[J]. 数学物理学报，2004，24A (3)：329-336.
Zhang Hongwei，Hu Qingying. Existence of Global Weak Solution and Stability of A Class Nonlinear Evolution Equation [J]. Acta Mathematiea Scientia，2004，24A (3)：329-336.

[10] James C Robinson. Infinite-Dimensional Dynamical Systems [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2001.

[11] Evans L C. Partial Differential Equation[M]. Island：American Mathematical Society，1998.

（责任编辑：廖友媛）