抛物微分方程半离散有限元导数重构的强超收敛性

洪瑞春，颜烽阳，熊之光

（湖南科技大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：基于单元上的正交展开和连续最优化，研究了一维抛物微分方程初边值问题的 n 阶半离散有限元单元块导数重构方法，证明了在单元块上重构空间导数具有 $n-1$ 个强超收敛点。

关键词：抛物微分方程；半离散有限元；块导数重构方法；强超收敛性

中图分类号：O175.26　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0029-03

Ultraconvergence of Semidiscrete Finite Element Derivative Recovery for Parabolic Differential Equation

Hong Ruichun，Yan Fengyang，Xiong Zhiguang

（School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201，China）

Abstract: Based on an orthogonal expansion in the element and continuous optimization，studies an n-order semidiscrete finite element patch derivative recovery method for the parabolic differential equation with initial-boundary. Proves that the recovery derivative obtained by this method has n-1 ultraconvergent points in a patch.

Keywords: parabolic differential problem; semidiscrete finite element; patch derivative recovery method; ultraconvergence

1　问题的提出

本文研究如下一类一维抛物微分方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t+Au=f \quad (0<x<1,\ 0<t<T), \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad (0<t<T), \\ u(x,0)=\phi(x) \quad (0<x<1), \end{cases} \tag{1}$$

这里 $Au=-\partial_x(a_1\partial_x u)+a_0 u$ 为椭圆算子，a_0，a_1 充分光滑，同时 $a_1>a>0$，$a_0>0$，a 为常数，则问题（1）适定且存在唯一解。（1）对应变分形式为

$$\begin{cases} (u_t, v)-A(u,v)=(f,v) \quad \left(v\in H_0^1(\Omega)\right), \\ u(x,0)=\phi(x), \end{cases}$$

这里双线性 $A(u,v)=\int_0^1\left(a_1\partial_x u\partial_x v+a_0 uv\right)\mathrm{d}x$。

超收敛性指至少有高一阶的精度，而强超收敛性（Ultraconvergence）指具有高两阶的收敛性。有限元 u_h 的导数 $\partial_x u_h$ 在单元之间不连续，在单元端节点上的精度较小。文献[1]对线性问题提出了有限元单元块重构问题；随后文献[2-3]分别给出了一维和二维单元块重构技术；文献[4]还给出了一维有限元单元块重构问题的数学论证。2000年，陈传淼提出了一种研究有限元超收敛问题的新思想[5]，并在文献[6]中讨论了2点边值问题的单元块Lagrange插值型重构导数及其强超收敛性；熊之光等利用连续性优化方法研究非线性一阶常微分方程初值问题的插值系数有限元导数，通过重构后在单元块内部获得丰富的强超收敛点[7]。本文利用连续优化方法研究抛物微分方程（1）的有限元导数重构方法，也有与文献[7]类似的结论。

收稿日期：2009-09-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771058），湖南省自然科学基金资助项目（09JJ3011），湖南科技大学研究生创新基金资助项目（S090123）

通信作者：熊之光（1964-），男，湖南凤凰人，湖南科技大学教授，博士，主要研究方向为微分方程数值解法，
E-mail: xiongzg2003@yahoo.com.cn

2　导数重构及主要结果

引进区间E=[−1，1]上Legendre多项式[6]

$$l_0=1,\ l_1=s,\ l_2=\left(2s^{2-1}\right)/2,\ \cdots,\ l_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left(s^2-1\right)^n,$$

其中：

当$i\neq j$时，$\left(l_i,l_j\right)=0$；

当$i=j$时，$\left(l_i,l_j\right)=\dfrac{2}{2j+1}$，　$l_j(\pm1)=(\pm1)^j$　；

$l_n(s)$有n个相异的根（n阶Gauss点）。

对空间区间作M等分，其步长记为h，单元为$J_m=[x_{m-1},\ x_m]$（$m=1，2，\cdots，M$），单元中点为$x_{m-1/2}$。记两相邻单元的并为$\tilde{J}_m=J_{m-1}\cup J_m=[x_{m-1},\ x_{m+1}]$，定义$R\left(\partial_x u_h(x,t)\right)$为$\partial_x u_h(x)$的导数重构，可以满足下列正交展开

$$R\left(\partial_x u_h(x,t)\right)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(t)\tilde{l}_j(x)\quad\left(x\subset\tilde{J}_m\right),\tag{2}$$

其中$\tilde{l}_j(x)=l_j\left(\dfrac{x-x_m}{h}\right)$是单元块$\tilde{J}_m$上$j$阶Legendre多项式，有$j$个相异根：$g_k\in\tilde{J}_m$　$(k=1,2,\cdots,j)$，同样称之为单元块$\tilde{J}_m$上的j阶Gauss点。要求（2）满足下列连续性假设

$$\int_{\tilde{J}_m}R\left(\partial_x u_h-\partial_x u\right)^2\mathrm{d}x=\int_{\tilde{J}_m}\left[\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(t)\tilde{l}_j(x)-\partial_x u(x,t)\right]^2\mathrm{d}x=$$

$$\min_{(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^{n+1}}\int_{\tilde{J}_m}\left[\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\tilde{l}_j(t)-\partial_x u_h(x,t)\right]^2\mathrm{d}x\ (0<t<T),$$

利用最优化原理，有下列关于α_0，α_1，α_2，$\cdots$，α_n的代数方程组

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\int_{\tilde{J}_m}\tilde{l}_j(x)\tilde{l}_k(x)\mathrm{d}x=\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u_h(x,t)\tilde{l}_k(x)\mathrm{d}x\qquad(k=0,1,\cdots,n),$$

利用$\tilde{l}_j(x)$的正交性，可以得到下列公式成立

$$\alpha_j(t)=h^{-1}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u_h(x,t)\tilde{l}_j(x)\mathrm{d}x\right]\qquad(j=0,1,2,\cdots,n),$$

即$R\partial_x u_h=h^{-1}\sum\limits_{j=0}^{n}\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\left[\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u_h(x,t)\tilde{l}_j(x)\right]\tilde{l}_j(x)$。

因此，重构算子R在块单元$\tilde{J}_m$上满足

$$R:w(x)\to Rw(x)=$$

$$h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(j-\frac{1}{2}\right)\left[\int_{\tilde{J}_m}w(\xi)\tilde{l}_j(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\tilde{l}_j(x)。\tag{3}$$

对于导数重构$R\left(\partial_x u_h(x,t)\right)$有如下强超收敛性。

定理　设$u(x,t)$是抛物微分方程初边值问题（1）的充分光滑解，$u_h(x,t)$是其空间半离散有限元解，且$R\left(\partial_x u_h(x,t)\right)$是$u_h$由式（3）定义的重构导数，则在块单元$\tilde{J}_m$上存在$n-1$个超强收敛点$q_k\in\tilde{J}_m$（$k=1,2,\cdots,n-1$），使得$\left(u'-Ru'_h\right)(q_k,t)=O\left(h^{n+2}\right)\ (k=1,2,\cdots,n-1,\ 0<t<T)$。　（4）

3　定理的证明

分解$\partial_x u-R\partial_x u_h$为：

$\partial_x u-R\partial_x u_h=\partial_x u-R\partial_x u+R\partial_x u-R\partial_x u_h$。

首先讨论第1项$\partial_x u-R\partial_x u$的估计，且$\partial_x u$有以下的正交展开

$$\partial_x u(x,t)=\sum_{j=0}^{n+1}\beta_j(t)\tilde{l}_j(x)+O\left(h^{n+2}\right)\quad(0<t<T),\tag{5}$$

系数β_j满足$\beta_j(t)=h^{-1}\left(j-\dfrac{1}{2}\right)\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u(x,t)\tilde{l}_j(x)\mathrm{d}x$

（$j=0，1，2，\cdots，n+1，0<t<T$）。利用重构算子所满足的式（3）以及单元块$\tilde{J}_m$上Legendre多项式的正交性，则

$$R\partial_x u=h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u(\xi,t)\tilde{l}_j(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\tilde{l}_j(x)=$$

$$h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{k=0}^{n+1}\beta_k\int_{\tilde{J}_m}\partial_x u(\xi,t)\tilde{l}_j(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\tilde{l}_j(x)+O\left(h^{n+2}\right)=$$

$$\sum_{j=0}^{n}\beta_j(t)\tilde{l}_j(x)+O\left(h^{n+2}\right)；\tag{6}$$

式（5）−（6）得：

$$\partial_x u-R\partial_x u=\beta_{n+1}\tilde{l}_{n+1}(t)+O\left(h^{n+2}\right)。\tag{7}$$

其次讨论第2项$R\left(\partial_x u-\partial_x u_h\right)$。令$\rho=\partial_x u-\partial_x u_h$，由（3）得到它在单元块$\tilde{J}_m$上的表达式为

$$\rho=\begin{cases}b_n\left(J_m\right)l_{n-1}^{J_m}(x)+b_{n-1}\left(J_m\right)l_n^{J_m}(x)+b_{n+2}\left(J_m\right)l_{n+1}^{J_m}(x)+\\ \qquad O\left(h^{n+2}\right)\quad\left(x\in J_m\right),\\ b_n\left(J_{m-1}\right)l_{n-1}^{J_{m-1}}(x)-b_{n+1}\left(J_{m+1}\right)l_n^{J_{m-1}}(x)+\\ \qquad b_{n+2}\left(J_{m+1}\right)l_{n+1}^{J_{m+1}}(x)+O\left(h^{n+2}\right)\quad\left(x\in J_{m-1}\right),\end{cases}$$

这里$l_j^{J_m}(x)=l_j\left(\dfrac{x-x_{m-1/2}}{0.5h}\right)$，$l_j^{J_{m+1}}(x)=l_j\left(\dfrac{x-x_{m+1/2}}{0.5h}\right)$

（j=0,1,2,⋯）分别是单元J_m、J_{m+1}上的Legendre多项式，$x_{m-1/2}$，$x_{m+1/2}$分别是单元J_m、J_{m+1}的中点，所以，重构后又得到

$$R\rho=h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\int_{\tilde{J}_m}\rho(\xi,t)\tilde{l}_j(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\tilde{l}_j(x)=$$

$$h^{-1}\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left[\int_{J_m}\left(b_n\left(J_m\right)\tilde{l}_{n-1}^{J_m}+b_{n+1}\left(J_m\right)l_n^{J_m}+\right.\right.$$

$$\left.b_{n+2}\left(J_m\right)l_{n-1}^{J_m}\tilde{l}_j(\xi)\right)\mathrm{d}\xi+\int_{J_{m+1}}\left(b_n\left(J_{m+1}\right)l_{n-1}^{J_{m+1}}+\right.$$

$$\left.\left.b_{n+1}\left(J_{m+1}\right)l_n^{J_{m+1}}+b_{n+2}\left(J_{m+1}\right)l_{n-1}^{J_{m+1}}\cdot\tilde{l}_j(\xi)\right)\mathrm{d}\xi\right]\tilde{l}_j(x)+O\left(h^{n+2}\right)。\tag{8}$$

分别利用$l_j^{J_m}$、$l_j^{J_{m+1}}$在单元J_m、J_{m+1}上的正交性，式（8）所有含$\tilde{l}_j(\xi)(j \le n-2)$的积分消失后化简为

$$R\rho = \beta_{n-1}^{*}\tilde{l}_{n-1}(x) + \beta_n^{*}\tilde{l}_n(x) + O\left(h^{n+2}\right)\left(0 < t < T\right), \qquad (9)$$

其中系数

$$\beta_{n-1}^{*} = h^{-1}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left[\int_{J_m} b_n\left(J_m\right)\tilde{l}_{n-1}^{J_m} l_{n-1}\,\mathrm{d}\xi + \int_{J_{m+1}} b_n\left(J_{m+1}\right) l_{n-1}^{J_{m+1}}\tilde{l}_{n-1}\,\mathrm{d}\xi\right],$$

$$\beta_n^{*} = h^{-1}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\int_{J_m} b_n\left(J_m\right)\tilde{l}_{n-1}^{J_m} l_{n-1}\,\mathrm{d}\xi + \int_{J_{m+1}} b_n\left(J_{m+1}\right) l_n^{J_{m+1}}\tilde{l}_n\,\mathrm{d}\xi\right],$$

综合式（7）和（8）对重构导数误差有

$$\partial_x u - R\partial_x u_h = \beta_{n-1}^{*}\tilde{l}_{n-1}(x) - \beta_n^{*}\tilde{l}_n(x) - \beta_{n-1} l_{n-1}(x) + O\left(h^{n+2}\right) \quad \left(0 < t < T\right),$$

令函数e为

$$e(x,t) = \beta_{n-1}^{*}(t)\tilde{l}_{n-1}(x) + \beta_n^{*}(t)\tilde{l}_n(x) + \beta_{n+1}(t)\tilde{l}_{n+1}(x) \quad \left(0 < t < T\right). \qquad (10)$$

式（10）中取$\tilde{l}_n(x)$的根$g_k \in \tilde{J}_m\left(k = 1, 2, \cdots, n\right)$（它们是$\tilde{J}_m$上的$n$阶 Gauss 点），就有

$$\left(\partial_x u - R\partial_x u_h\right)\left(g_k, t\right) = e_k + O\left(h^{n+2}\right),$$

其中

$$e_k = e\left(g_k, t\right) = \beta_{n-1}^{*}(t)\tilde{l}_{n-1}\left(g_k\right) + \beta_{n+1}(t)\tilde{l}_{n+1}\left(g_k\right)$$

（$0<t<T$）。

利用 Legendre 多项式所满足的递推公式[6]

$$n\tilde{l}_{n-1}(x) - (2n+1)\tilde{l}_n(x) + (n+1)\tilde{l}_{n+1}(x) = 0 \ (x \in \tilde{J}_m)$$

可知，对n阶 Gauss 点g_k，$\dfrac{\tilde{l}_{n+1}\left(g_k\right)}{\tilde{l}_{n-1}\left(g_k\right)} = -\dfrac{n}{n+1}$与$k$、$t$无关，所以$e_k = \mu\tilde{l}_{n-1}\left(g_k\right)$。这里$\mu = \mu(t) = \beta_{n-1}^{*}(t) - \dfrac{n}{n-1}\beta_{n+1}(t)$与$k$无关，且$\tilde{l}_{n-1}\left(g_k\right)$是正负交替的，从而当$t$固定时，$e_k$也是正负交替的。

根据连续函数的性质，$\tilde{J}_m$单元块中必存在$n-1$个点$q_k(k=1，2，\cdots，n-1)$，使得$e(q_k，t)=0 \quad (0<t<T)$，即$\left(\partial_x u - R\partial_x u_h\right)\left(q_k, t\right) = O\left(h^{n+2}\right) \quad (0<t<T)$。

定理得证。

参考文献：

[1] Zienkiewicz O C，Zhu J Z. The Superconvergence Patch Recovery (SPR) and Adaption Finite Element Refinement[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.，1992，101(1)：207−224.

[2] Zhang Z. Ultraconvergence of the Path Recovery Technique [J]. Math. Comp.，1996，65(4)：1431−1437.

[3] Zhang Z. Ultraconvergence of the Path Recovery Technique II [J]. Math. Comp.，2000，69(1)：141−158.

[4] Zhang Z，Victory H D. Mathematical Analysis of Zienkiewicz-Zhu's Derivative Patch Recovery Technique[J]. Numercal Methods for PDE.，1996，12(2)：507−524.

[5] 陈传淼. 有限元超收敛研究的新思想[J]. 湖南师范大学自然科学学报，2000，23(1)：1−6.
Chen Chuanmiao. A New Idea on Superconvergence Research in Finite Elements[J]. Journal of Naturnal Science of Hunan Normal University，2000，23(1)：1−6.

[6] 陈传淼. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙：湖南科技出版社，2001.
Chen Chuanmiao. Structure Theory of Superconvergence of Finite Elements[M]. Changsha：Hunan Press of Science and Technology，2001.

[7] 熊之光，邓　康. 两点边值问题有限元重构导数强超收敛性[J]. 应用数学，2004，17(4)：656−660.
Xiong Zhiguang，Deng Kang. Ultraconvergence of Finite Element Derivative Recovery for Two-Point Boundary Problem[J]. Mathematica Applicata，2004，17(4)：656−660.

（责任编辑：张亦静）