第24卷第1期　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　Vol.24 No.1
2010年1月　　Journal of Hunan University of Technology　　Jan. 2010

带变号扰动的半线性椭圆方程正解存在的必要条件

庞善状，曾宪忠

（湖南科技大学 数学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：研究了一类带变号扰动的半线性椭圆方程正解存在的必要条件，获得了对于合适的参数，如果半线性椭圆方程都存在满足一定条件的正解，那么，对应的线性方程存在非负解。

关键词：带变号扰动的半线性椭圆方程；正解存在的必要条件；变分泛函；Pohozaev 恒等式

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0025-04

Existence Condition of Positive Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Sign-Changing Perturbations

Pang Shanzhuang，Zeng Xianzhong

（Department of Mathematics，Hunman University of Science and Technology，Xiangtan Hunan 411201，China）

Abstract：Investigates the necessary existence condion of positive solutions for a class of semilinear elliptic equations with sign-changing perturbations. Obtains that for appropriate parameters, the corresponding linear equations exist a nonnegative solution if the semilinear elliptic equations possess positive solutions at certain conditions.

Keywords：semilinear elliptic equations with sign-changing perturbations; necessary condition of existence for positive solutions; variation functional; Pohozaev identity

0　引言

对于半线性椭圆方程$-\Delta u-\lambda u+|u|^{p-1}u+\mu f(x)$，当$f(x)>0$时的情况国内外已有较多研究，并且得到了方程多解存在性和非存在性的较多有意义的结果[1-5,7]。而对$f(x)$在Ω上变号的问题研究较少，只有文献[6-7]对$\lambda=0$时的方程作了一些研究。由于$f(x)$在Ω上变号的问题在工程问题中普遍存在，因此，仔细地研究这类问题是有意义和价值的。

本文主要研究下列半线性椭圆方程正解存在的必要条件：

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u-|u|^{p-1}u+\mu f(x) & (x\in\Omega),\\ u=0 & (x\in\partial\Omega),\end{cases}\tag{1}$$

其中$\Omega\subset R^N$是有解光滑区域，$N\geq 3, P>1, \mu>0$，$f(x)\in C^1(\overline{\Omega})$为在$\Omega$上变号的函数，并且$\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x>0$。$(\lambda_1,\varphi)$为特征值问题$-\Delta\varphi=\lambda\varphi, \varphi|_{\partial\Omega}=0$的第一特征对，并且在$\Omega$上$\varphi_1(x)>0$。证明如果对于所有足够小的$\mu$，式（1）都存在正解并且有1个正解$u_\mu<\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，那么，下列线性方程存在非负解

$$\begin{cases}-\Delta v=\lambda v+f(x) & (x\in\Omega),\\ v=0 & (x\in\partial\Omega)。\end{cases}\tag{2}$$

存在较多变号函数$f(x)$使得式（1）存在正解，而式（2）没有正解，并且能验证当μ充分小时式（1）的正解可能近似于当$\mu=0$时的正解。

为计算方便，设$\mu^*=\sup\{\mu|$对于给定的

收稿日期：20-09-07

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671064，50604008）

通信作者：庞善状（1984-），男，山东沂蒙人，湖南科技大学硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程理论，
E-mail：pangshanzhuang@163.com

$\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$，式（1）至少存在1个正解[3]。使用估计理论和Pohozaev恒等式讨论式（1）存在正解的必要条件。本文的结论如下。

定理 i）对于$p>1$和给定的$\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$，如果对于所有足够小的$\mu\in(0,\mu^*]$，式（1）都存在正解并且有1个正解$u_\mu\le\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，那么，式（2）存在非负解。

ii）对于$p>\frac{N+2}{N-2}$，设$C_0=\frac{2N}{p-1}+N-2$，Ω为星型区域，$\lambda<\frac{C_0\lambda_1}{C_0+2}$。如果对于所有足够小的$\mu\in(0,\mu^*]$，式（1）存在正解$u_\mu$，那么，式（2）存在非负解。

1 预备知识

下面介绍一些预备知识和证明式（1）存在正解的一些性质。

引理1 当$\lambda\ge\lambda_1$时，式（1）没有正解。

证明 假设引理1不成立，设当$\lambda\ge\lambda_1$时式（1）存在正解，那么，式（1）乘以φ_1然后分布积分得：

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u_\mu\varphi_1\mathrm{d}x=\int_\Omega u_\mu^{\ p}\varphi_1\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x,\tag{3}$$

由于$\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x>0$，则$\lambda<\lambda_1$，矛盾。因此，当$\lambda\ge\lambda_1$时式（1）没有正解。

引理2 对于给定的$\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$，如果式（1）存在正解，那么存在正常数$\mu^*$使得$\mu\le\mu^*$。而当$\mu>\mu^*$时式（1）没有正解。

证明 对于给定的$\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$，因为$\lambda u-u^p-\lambda_1 u$有极小值，所以存在正常数$C$使得$\lambda u-u^p\ge\lambda_1 u-C$。如果式（1）存在正解，那么式（1）乘以$\varphi_1$然后积分得：

$$\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1\mathrm{d}x\ge\int_\Omega(\lambda_1 u-C)\varphi_1\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x,\tag{4}$$

$$\mu\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x\le C\int_\Omega\varphi_1\mathrm{d}x,\tag{5}$$

结合$\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x\ge 0$得到：

$$\mu\le\frac{C\int_\Omega\varphi_1\mathrm{d}x}{\int_\Omega f(x)\varphi_1\mathrm{d}x}。\tag{6}$$

因此，存在正常数μ^*使得$\mu\le\mu^*$。而当$\mu>\mu^*$时式（1）没有正解。

引理3 对于给定的$\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$和$\mu\in(0,\mu^*]$，如果式（1）存在正解满足$u_\mu\le\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，那么特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta v-\left(\lambda+pu_\mu^{\ p-1}\right)v=\alpha v & (x\in\Omega),\\ v=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}\tag{7}$$

的第一特征值$\alpha_1>0$。

证明 设$B=\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，则$\lambda+pB^{p-1}=\lambda_1$。于是，特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta v-\left(\lambda+pB^{p-1}\right)v=\beta v & (x\in\Omega),\\ v=0 & (x\in\partial\Omega)\end{cases}\tag{8}$$

的第一特征值$\beta_1=0$。根据比较定理由$\lambda+pu_\mu^{\ p-1}\le,\ \ne\lambda+pB^{p-1}$，得到$\alpha_1>0$。

引理4 设对于所有充分小的μ，式（1）存在正解满足$u_\mu<\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，$\mu^{**}=\sup\left\{\mu\middle|式（1）存在正解u_\mu满足u_\mu\le\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}\right\}$，$A=\left\{u_\mu\middle|当\mu\in\left(0,\mu^{**}\right]时u_\mu是式（1）的最小正解\right\}$，则存在不依赖$\mu$的正常数$C$使得当$u_\mu\in A$时$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}<C$，并且$\int_\Omega f(x)u_\mu\mathrm{d}x>0$，$\int_\Omega u_\mu^{\ p+1}\mathrm{d}x<C$。

证明 对于任意的$u_\mu\in A$，由式（1）和引理3分别得到：

$$\int_\Omega|\nabla u_\mu|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\lambda u_\mu^2+u_\mu^{p+1}\right)\mathrm{d}x+\mu\int_\Omega f(x)u_\mu\mathrm{d}x,\tag{9}$$

$$\int_\Omega|\nabla u_\mu|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\lambda u_\mu^2+pu_\mu^{p+1}\right)\mathrm{d}x\ge\alpha_1\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x,\tag{10}$$

结合式（9）和（10）得：

$$\int_\Omega\left(|\nabla u_\mu|^2-\lambda u_\mu^2\right)\mathrm{d}x<\frac{p\mu}{p-1}\int_\Omega f(x)u_\mu\mathrm{d}x,\tag{11}$$

使用Poincare不等式$\lambda_1\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega|\nabla u_\mu|^2\mathrm{d}x$和Young不等式得：

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x\le\frac{p\mu}{p-1}\int_\Omega f(x)u_\mu\mathrm{d}x,\tag{12}$$

$$(\lambda_1-\lambda)\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x<\frac{p\mu^*}{p-1}\left(\frac{\delta}{2}\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2\delta}\int_\Omega f^2\mathrm{d}x\right).\tag{13}$$

取δ满足$\frac{p\mu^*\delta}{2(p-1)}=\frac{\lambda_1-\lambda}{2}$，则

$$\int_\Omega u_\mu^2\mathrm{d}x\le\left[\frac{p\mu^*}{(\lambda_1-\lambda)(p-1)}\right]^2\int_\Omega f^2\mathrm{d}x=C,\tag{14}$$

结合式（11）得到$\int_\Omega|\nabla u_\mu|^2\mathrm{d}x\le C$，由式（12）得$\int_\Omega f(x)u_\mu\mathrm{d}x>0$。而对式（9）使用Holder不等式并结合$\int_\Omega|\nabla u_\mu|^2\mathrm{d}x\le C$和式（14）得$\int_\Omega u_\mu^{p+1}\mathrm{d}x\le C$。

引理5 对于$\lambda<\lambda_1$，设$B=\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，则当$\mu\in\left(0,\mu^{**}\right]$时式（1）最多只有1个正解满足$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$。

证明 对于$\lambda<\lambda_1$，由B的定义得$pB^{p-1}=\lambda_1-\lambda$。假设引理5不成立，设当$\mu\in\left(0,\mu^{**}\right]$时式（1）除了最小正

解u_μ满足$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$外，还有另一正解$w=u_\mu+v$也满足$\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$，其中$v\ge,\ne 0$，则满足：

$$-\Delta v=\left[\lambda+p(a(x))^{p-1}\right]v,\tag{15}$$

并且$v|_{\partial\Omega}=0$，其中$a(x)$位于u_μ和w之间。由方程（15）得到：

$$\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[\lambda+p(a(x))^{p-1}\right]v^2\mathrm{d}x。\tag{16}$$

使用Poincare不等式得：

$$\lambda_1\int_\Omega v^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega\left[\lambda+p\left(a(x)\right)^{p-1}\right]v^2\mathrm{d}x,\tag{17}$$

由于$a(x)$位于u_μ和w之间，并且$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$和$\|w\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$，则$\|a(x)\|_{L^\infty(\Omega)}\le B$。结合式（17）并注意$a(x)\ne B$，得到$\lambda_1\int_\Omega v^2\mathrm{d}x<\left[\lambda+pB^{p-1}\right]\int_\Omega v^2\mathrm{d}x$，于是，$v\equiv 0$，矛盾，从而引理成立。

引理 6　设Ω是星型区域，对于$\lambda\le 0$和$p>\frac{N+2}{N-2}$，如果式（1）除最小正解u_μ外还有另一正解w_μ，那么，当$\mu\to 0^-$时$\|w_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\to\infty$。

证明　假设相反，设当$\mu\to 0$时存在正常数C，使得$\|w_\mu\|_{L^\infty(\Omega)}\le C$，那么，存在$w_\mu$的一个序列$\{w_{\mu_n}\}$使得当$n\to\infty$时$\mu_n\to 0, w_{\mu_n}\to w\in H_0^2(\Omega)$且$w$满足下列方程：

$$-\Delta w=\lambda w+|w|^{p-1}w,\tag{18}$$

以及$w|_{\partial\Omega}=0$，设Ω含有原点，则方程（18）的Pohozaev恒等式为：

$$\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)|\nabla w|^2\mathrm{d}S=2\lambda\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\left(\frac{2N}{p+1}-N+2\right)\int_\Omega w^{p+1}\mathrm{d}x,\tag{19}$$

由于Ω是星型区域，则$(x\cdot n)>0$和$\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)|\nabla w|^2\mathrm{d}x\ge 0$，而当$p\ge\frac{N+2}{N-2},\lambda\le 0$时，结合式（19）得到$\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)|\nabla w|^2\mathrm{d}S\le 0$。因此，$w$=0恒成立。另一方面，由于$u_{\mu_n}$为式（1）的最小正解，则根据引理5得当$\mu_n$足够小时$\|w_{\mu_n}\|_{L^\infty(\Omega)}>B$。于是，$\|w\|_{L^\infty(\Omega)}=\lim\limits_{n\to\infty}\|w_{\mu_n}\|_{L^\infty(\Omega)}>B$，与$w$=0恒成立矛盾。因此，引理成立。

引理 7　i）对于$p>1$，如果对于所有充分小的μ，式（1）都存在正解并且有1个正解$u_\mu<\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，那么，当$\mu\to 0$时$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$。

ii）对于$p>\frac{N+2}{N-2}$，设$C_0=-\frac{2N}{p+1}+N-2$，Ω为星型区域，$\lambda<\frac{C_0\lambda_1}{C_0+2}$。如果对于所有充分小的$\mu\in\left(0,\mu^*\right]$，式（1）都存在正解$u_\mu$，那么，当$\mu\to 0$时$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$。

证明　设u_μ为式（1）的正解，令$u_\mu=\mu v_\mu$，则v_μ满足：

$$\Delta v_\mu=\lambda v_\mu-\mu^{p-1}|v_\mu|^{p-1}v_\mu+f(x),\tag{20}$$

且$v_\mu|_{\partial\Omega}=0$。设$\Omega$含有原点，参考文献[6]，方程（20）对应的Pohozaev恒等式为：

$$\int_{\partial\Omega}(x\cdot n)|\nabla v_\mu|^2\mathrm{d}S=2\lambda\int_\Omega v_\mu^2\mathrm{d}x-\left(\frac{2N}{p+1}-N-2\right)\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x+2\int_\Omega(x\cdot\nabla f)v_\mu\mathrm{d}x+(3-N)\int_\Omega fv_\mu\mathrm{d}x,\tag{21}$$

由于Ω是星型区域，则

$$(x\cdot n)>0,\ \int_{\partial\Omega}(x\cdot n)|\nabla v_\mu|^2\mathrm{d}S\ge 0,$$

于是

$$\left(-\frac{2N}{p+1}+N-2\right)\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x<2\lambda\int_\Omega v_\mu^2\mathrm{d}x-2\int_\Omega(x\cdot\nabla f)v_\mu\mathrm{d}x+(3-N)\int_\Omega fv_\mu\mathrm{d}x。\tag{22}$$

i）对于$p>1$，如果对于所有充分小的μ，式（1）都存在正解并且有1个正解$u_\mu<\left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}$，那么，由式（11）得

$$\frac{p-1}{p}\int_\Omega\left(|\nabla v_\mu|^2-\lambda v_\mu^2\right)\mathrm{d}x\le\int_\Omega fv_\mu\mathrm{d}x,\tag{23}$$

同时，类似式（11）~（14）的讨论得到存在正数C使得$\int_\Omega v_\mu^2\mathrm{d}x\le C$和$\int_\Omega|\nabla v_\mu|^2\mathrm{d}x\le C$，而且，当$1<p\le\frac{N+2}{N-2}$时，根据Soboleb嵌入定理得$\int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x\le C$，于是，$\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p-1}\mathrm{d}x\le C$。而当$p>\frac{N+2}{N-2}$时，根据式（22）和Holder不等式得到：$\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p-1}\mathrm{d}x\le C$。注意到$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}=\mu\|v_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}$，因此，当$\mu\to 0$时$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$。

ii）对于$p>\frac{N+2}{N-2}$，如果式（1）存在正解u_μ，那么，由式（22）得

$$\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x\le\frac{2\lambda}{C_0}\int_\Omega v_\mu^2\mathrm{d}x+\frac{2}{C_0}\int_\Omega(x\cdot\nabla f)v_\mu\mathrm{d}x+\frac{3-N}{C_0}\int_\Omega fv_\mu\mathrm{d}x,\tag{24}$$

其中$C_0=-\frac{2N}{p+1}+N-2>0$，而由方程（20）得

$$\int_\Omega|\Delta v_\mu|^2\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega v_\mu^2\mathrm{d}x+\mu^{p-1}\int_\Omega|v_\mu|^{p-1}\mathrm{d}x+\int_\Omega f(x)v_\mu\mathrm{d}x,\tag{25}$$

结合式（24）和（25）得到

$$\int_\Omega |\Delta v_\mu|^2 \mathrm{d}x \le \frac{(C_0+2)\lambda}{C_0}\int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x + \frac{2}{C_0}\int_\Omega (x\cdot\nabla f)v_\mu \mathrm{d}x + \left(1+\frac{3-N}{C_0}\right)\int_\Omega f v_\mu \mathrm{d}x, \quad (26)$$

于是，使用Poincare不等式得：

$$\left(\lambda_1 - \frac{(C_0+2)\lambda}{C_0}\right)\int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x \le \frac{2}{C_0}\int_\Omega (x\cdot\nabla f)v_\mu \mathrm{d}x + \left(1+\frac{3-N}{C_0}\right)\int_\Omega f v_\mu \mathrm{d}x. \quad (27)$$

因此，当$\lambda < \frac{C_0\lambda_1}{C_0+2}$时，使用Young不等式得 $\int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x \le C$。对式（26）使用Young不等式并结合 $\int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x \le C$得$\int_\Omega |\nabla v_\mu|^2 \mathrm{d}x \le C$，而对式（25）使用Young不等式并结合$\int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x \le C$ 和 $\int_\Omega |\nabla v_\mu|^2 \mathrm{d}x \le C$ 得到 $\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^{p-1} \mathrm{d}x \le C$。注意到$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)} = \mu\|v_\mu\|_{H_0^1(\Omega)}$，因此，当$\mu \to 0$时$\|u_\mu\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$。

2 问题（1）存在正解的必要条件

证明 i）对于$p>1$，设对于所有充分小的μ，式（1）都存在正解u_μ，并且满足$u_\mu \le \left(\frac{\lambda_1-\lambda}{p}\right)^{1/(p-1)}\mu$，让$u_\mu = \mu v_\mu$，则$v_\mu$满足

$$\begin{cases} \Delta v_\mu = \lambda v_\mu + \mu^{p-1}v_\mu^p + f(x) & (x\in\Omega), \\ v_\mu = 0 & (x\in\partial\Omega), \end{cases} \quad (28)$$

根据引理7 i）的讨论得

$$\int_\Omega |\nabla v_\mu|^2 < C, \int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x < \frac{C}{\mu^{p-1}}, \int_\Omega v_\mu^2 \mathrm{d}x < C, \quad (29)$$

则存在v_μ的1个序列$\{v_{\mu_n}\}$和$w\in H_0^1(\Omega)$使得当$n\to\infty$时$\mu_n \to 0$且$v_{\mu_n} \to w$。于是，对于任意的$\varphi\subset C_0^\infty(\Omega)$，当$\mu_n \to 0$时有

$$\int_\Omega \nabla v_\mu \nabla\varphi \mathrm{d}x \to \int_\Omega \nabla w\nabla\varphi \mathrm{d}x, \int_\Omega v_\mu\varphi \mathrm{d}x \to \int_\Omega w\varphi \mathrm{d}x。 \quad (30)$$

而由式（29）和Holder不等式得

$$\int_\Omega v_\mu^p\varphi \mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega v_\mu^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{p/(p+1)}\left(\int_\Omega \varphi^{p+1}\mathrm{d}x\right)^{1/(p+1)} \le \left(\frac{C}{\mu}\right)^{p(p-1)/(p+1)}. \quad (31)$$

因此，当$\mu \to 0$时，

$$\mu^{p-1}\int_\Omega v_\mu^p\varphi \mathrm{d}x \le C\mu^{p(p-1)/(p+1)} \to 0, \quad (32)$$

方程（28）乘以φ然后积分，并结合式（30）和（32）得到：

$$\int_\Omega \nabla w\nabla\varphi \mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega w\varphi \mathrm{d}x + \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x, \quad (33)$$

这表示w为式（2）的非负解。

ii）对于$p > \frac{N+2}{N-2}$，如果对于所有充分小的μ，式（1）存在正解，那么，由引理7 ii）得到式（29）成立。重复定理i）的证明过程，可以得到式（2）存在非负解。

参考文献：

[1] Deng Y B. Existence of Multiple Positive Solutions for $-\Delta u - \lambda u - u^{\frac{N+2}{N-2}} + \mu f(x)$[J]. Acta Mach. Sinica，1993，9(3)：311-320.

[2] Deng Y B，Li Y. Existence and Bifurcation of the Positive Solutions for A Semilinear Equation with Critical Exponet[J]. J. Differential Equations，1996，130(1)：179-200.

[3] Zhu X P. A Perturbation Result on Positive Entire Solutions for A Semilinear Equation[J]. J. Differential Equations，1991，92(2)：163-178.

[4] Brezis H，Nirenberg L. Positive Entire Solutions $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ in R^N[J]. Calc. Var，2000(11)：63-95.

[5] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 成都：四川大学出版社，1995.
Lu Wenduan. Variation Methods in The Differential Equations [M]. Chengdu：Sichuan University Press，1995.

[6] Dai Q Y，Gu Y G. Positive Entire Solutions for Nonhomogeneous Ellipic Equations with Data Change Sign [J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh，2003，133A：297-306.

[7] 李爱翠，曾宪忠. 带变号扰动的临界椭圆方程的两个正解的存在性[J]. 湘潭矿业学院学报，2001，16(1)：86-88.
Li Aicui，Zeng Xianzhong. Exsitence of Two Positive Solutions for A Elliptic Equation with Critical Exponet and A Perturbation Changed Sign. [J]. Journal of Xiangtan Mining Institute，2001，16(1)：86-88.

（责任编辑：罗立宇）