第24卷 第1期 2010年1月
湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology
Vol.24 No.1 Jan. 2010

一阶线性微分方程组的解法新探

阳凌云，符云锦

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：探讨了一阶线性自治非齐次微分方程组的特解，以及一阶线性齐次微分方程组的基本解组的求解问题，并提出新的特殊解法，从而得到其通解。

关键词：微分方程组；特解；基本解组

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0016-04

A New Investigation On Solution of First-Order Linear Differential Equations

Yang Linyun，Fu Yunjin

(School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract: Investigates particular solutions of first-order linear autonomous nonhomogeneous differential equations and the basic set of solutions for first-order linear homogeneous differential equations. And proposes a new special method to obtain general solutions of the above equations.

Keywords : differential equation systems; particular solution; basic set of solutions

求解一阶线性非齐次微分方程组时，有2个问题值得研究：一是求解一阶线性非齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)Y+\boldsymbol{F}(x),\tag{1}$$

或一阶线性自治非齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}\tag{2}$$

的特解，通常都是用常数变易法[1-2]求其特解，其计算量很大；二是求解方程组（1）所对应的齐次微分方程组的基本解组，到目前为止没有一般的方法。本文试图对上述2个问题进行探索，并针对2种特殊类型的微分方程提出其特殊的解法。

1　一阶线性自治非齐次微分方程组特解的新求法

定理1　设Y_1，Y_2，…，Y_n是微分方程组（2）所对应的齐次微分方程组$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}Y$的1个基本解组，$\tilde{Y}$是线性非齐次方程组$\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}=0$的1个非0解，则微分方程组（2）的通解为

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n+\tilde{Y}\text{。}$$

证明　若$\det\boldsymbol{A}\neq 0$，则由克拉默（Cramer）法则可知线性非齐次方程组$\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}=0$有唯一的非0解$\tilde{Y}$；若$\det\boldsymbol{A}$=0，则由克拉默法则可知$\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}=0$有无穷多组解，从而可取其中1个非0解$\tilde{Y}$。由于$\tilde{Y}$的每一个元都是常数，故有$\frac{\mathrm{d}\tilde{Y}}{\mathrm{d}x}=0$，又$\boldsymbol{A}\tilde{Y}+\boldsymbol{F}=0$，所以有$\frac{\mathrm{d}\tilde{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\tilde{Y}+\boldsymbol{F}$，即$\tilde{Y}$是微分方程组（2）的1个特解。从而微分方程组（2）的通解为：

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_nY_n+\tilde{Y}\text{。}$$

以下给出2个例子说明定理1的应用。

例1　解微分方程组$\begin{cases}\dot{x}=2y-x+1,\\ \dot{y}=3y-2x.\end{cases}$

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，

收稿日期：2009-08-16

通信作者：阳凌云（1947-），男，湖南湘潭人，湖南工业大学理学院教授，主要研究方向为分析学及其应用，E-mail：yly_mc@sina.com

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的特征根为 $\lambda_{1,2}=1$。根据待定系数法[3-5]，可以求出原方程组所对应的齐次微分方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}t\right]e^t + C_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}t\right]e^t。$$

下面根据定理 1 可求出原方程组的 1 个特解。因 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$，则由克拉默法则可知线性方程组 $\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}=0$ 有唯一的解 $\tilde{Y}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$，所以原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}t\right]e^t + C_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}t\right]e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}。$$

例 2　解微分方程组 $\begin{cases} \dot{x}=x+y+z-1, \\ \dot{y}=x-y-z+2, \\ \dot{z}=3x-y-z+3. \end{cases}$

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=2$ 所对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

下面根据定理 1 可求出原方程组的 1 个特解。

因 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$，则由克拉默规则可知 $\boldsymbol{A}Y+\boldsymbol{F}=0$ 有无穷多组解 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y+z=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ 取其非 0 解 $\tilde{Y}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$，所以原方程的通解为：

$$Y(t)=C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}。$$

2　单项等幂线性微分方程组的解法

定义 1　设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则称矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}x^n & a_{12}x^n & \cdots & a_{1n}x^n \\ a_{21}x^n & a_{22}x^n & \cdots & a_{2n}x^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x^n & a_{n2}x^n & \cdots & a_{nn}x^n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}x^n$$

为单项等幂矩阵，并称微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)Y+\boldsymbol{F}(x)$$

为单项等幂线性微分方程组。为书写方便，记

$$M=\frac{x^{n+1}}{n+1}。$$

定理 2　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$；$A(x)=\boldsymbol{A}x^n$，则单项等幂线性齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)Y \tag{3}$$

的通解为：

$$Y(x)=C_1e^{\lambda_1M}\boldsymbol{T}_1+C_2e^{\lambda_2M}\boldsymbol{T}_2+\cdots+C_ne^{\lambda_nM}\boldsymbol{T}_n。\tag{4}$$

证明　因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$，则由高等代数知识可知，恒存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1x^n & & & \\ & \lambda_2x^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_nx^n \end{pmatrix}$。

令 $Y=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}$，　(5)

则 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} \lambda_1x^n & & & \\ & \lambda_2x^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_nx^n \end{pmatrix}\boldsymbol{Z}$，

即
$$\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ \vdots \\ Z_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1x^n & & & \\ & \lambda_2x^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_nx^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

易见方程组（6）有 n 个线性无关解：

$$Z_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_1 M},\ Z_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}e^{\lambda_2 M},\ \cdots,\ Z_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}e^{\lambda_n M},$$

把这 n 个解代回变换式（5）中，便得方程组（3）的1个基本解组：

$$Y_i=e^{\lambda_i M}\boldsymbol{T}_i,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\boldsymbol{T}_i$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的第 i 列向量。所以方程组（3）的通解为：

$$Y(x)=C_1e^{\lambda_1 M}\boldsymbol{T}_1+C_2e^{\lambda_2 M}\boldsymbol{T}_2+\cdots+C_ne^{\lambda_n M}\boldsymbol{T}_n。$$

定理3 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个不同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，它们的重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$；$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}x^n$，则单项等幂线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)Y$ 对于每一个 λ_i 有 k_i 个形如 $Y_1(x)=P_1(M)e^{\lambda_i M}, Y_2(x)=P_2(M)e^{\lambda_i M},\cdots,Y_{k_i}(x)=P_{k_i}(M)e^{\lambda_i M}$ 的线性无关解，这里 $P_j(M)\ (j=1,2,\cdots,k_i)$ 的每一个分量为 M 的次数不高于 k_i-1 的多项式。取遍所有的特征根 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 就得到方程组的1个基本解组。

定理3的证明与文献[3]中定理3.14的证明方法相仿（从略）。

定理4 若 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k_i 重根，且 $\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}x^n$，则方程组 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})Y$ 有 k_i 个形如

$$Y(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}M^{k_i-1}\right]e^{\lambda_i M} \tag{7}$$

的线性无关解，其中向量 $\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{R}_{k_i-1}$ 由矩阵方程组

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\\qquad\vdots\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_{k_i-2}=(k_i-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)^{k_i}\boldsymbol{R}_0=0\end{cases} \tag{8}$$

所确定，取遍所有的 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 就得到方程组的1个基本解组。

证明 将式（7）代入方程组 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})Y$ 中得：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}Y(x)}{\mathrm{d}x}=\\&x^n\left[\boldsymbol{R}_1+2\boldsymbol{R}_2M+\cdots+(k_i-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1}M^{k_i-2}\right]e^{\lambda_i M}+\\&\lambda_ix^n\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}M^{k_i-1}\right]e^{\lambda_i M}=\\&\boldsymbol{A}(x)\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}M^{k_i-1}\right]e^{\lambda_i M}=\\&\boldsymbol{A}x^n\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}M^{k_i-1}\right]e^{\lambda_i M},\end{aligned}$$

消去 $e^{\lambda_i M}$ 与 x^n，比较等式两端的 M 同次幂的系数（向量），得：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\\vdots\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)\boldsymbol{R}_{k_i-2}=(k_i-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\(\boldsymbol{A}-\lambda_iE)^{k_i}\boldsymbol{R}_{k_i-1}=0,\end{cases} \tag{9}$$

注意到方程组（9）与（8）是等价的，故定理4得证。

特别地，当 $n=0$，即 $\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}$ 时，单项等幂线性齐次微分方程组就变成常系数线性齐次微分方程组（此时式（7）中的 $M=x$）。

以下给出1个例子说明定理2的应用。

例3 试求微分方程组 $\begin{cases}\dot{x}=3t^2x-t^2y+t^2z,\\\dot{y}=-t^2x+5t^2y-t^2z,\\\dot{z}=t^2x-t^2y+3t^2z\end{cases}$ 的通解。

解 $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，

$$A(t)=\begin{pmatrix}3t^2&-t^2&t^2\\t^2&5t^2&t^2\\t^2&-t^2&3t^2\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}t^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征单根 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=6$ 所对应的特征向量分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，

根据定理2可知原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{\frac{2}{3}t^3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{t^3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t^3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}。$$

以下再给出1个例子说明定理3与定理4的应用。

例4 求解方程组 $\begin{cases}\dot{x}=-t^2x+t^2y,\\\dot{y}_2=-t^2y+4t^2z,\\\dot{y}_3=t^2x-4t^2z.\end{cases}$

解 系数矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix}-t^2&t^2&0\\0&-t^2&4t^2\\t^2&0&-4t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}t^2=\boldsymbol{A}t^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-3$，由定理2易知 $\lambda_1=0$ 所对应的解是 $Y_1(t)=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$。

下面求$\lambda_2=\lambda_3=-3$所对应的2个线性无关解，由定理4可知其解形如$Y(t)=\left[R_0+R_1\frac{t^3}{3}\right]e^{-t}$，并且$R_0$，$R_1$满足矩阵方程

$$\begin{cases}(A-3E)R_0=R_1,\\(A-3E)^2R_0=0,\end{cases}$$

解得R_0的2个线性无关的向量$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$R_1$的2个向量分别为$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，故原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t^3\\1-\frac{2}{3}t^3\\-1+\frac{1}{3}t^3\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}。$$

3 结语

求解微分方程组（1）或（2）的特解过程，传统的解法是先将其对应的齐次方程组的通解采用常数变易法求解，即设原方程组特解为

$$\tilde{Y}=C_1(x)Y_1+C_2(x)Y_2+\cdots+C_n(x)Y_n,$$

并将其代入原方程组得

$$C_1'(x)Y_1+C_2'(x)Y_2+\cdots+C_n'(x)Y_n=F,$$

由此求得$C_i'(x)$，且积分后得$C_i(x)$ (i=1, 2,⋯, n)，从而得到特解$\tilde{Y}$。显然，这个过程不仅复杂而且计算量大、耗时多，并且容易出错。本文提出求特解$\tilde{Y}$的方法只需解线性非齐次方程组$AY+F=0$得到，此方法计算量小且不易出错。同时，对于单项等幂线性齐次微分方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$(其中$A(x)=Ax^n$)，当A的特征根为单根或重根时，提供了一种求其1个基本解组的新方法，但对于线性齐次微分方程组中$A(x)$的系数矩阵为一般形式时基本解组的求法将进一步研究。

参考文献：

[1] 化存才，赵奎奇. 常微分方程解法与建模应用选讲[M]. 北京：科学出版社，2009：86，90，97，116.
Hua Cuncai，Zhao Kuiqi. Selected Lectures of Ordinary Differential Equation and Modeling Application[M]. Beijing：Science Press，2009：86，90，97，116.

[2] 钱祥征，黄立宏. 常微分方程[M]. 长沙：湖南大学出版社，2008：73，80.
Qian Xiangzheng，Huang Lihong. Ordinary Differential Equation[M]. Changsha：Hunan University Press，2008：73，80.

[3] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2006：146-152.
Differential Equation Teaching Aed Research Section of Northeast Normal University. Ordinary Differential Equation [M]. 2nd Ed. Beijing：Higher Eduction Press，2006：146-152.

[4] 焦宝聪，王在洪. 常微分方程[M]. 北京：清华大学，2008：178.
Jiao Baocong，Wang Zaihong. Ordinary Differential Equation [M]. Beijing：Tsinghua University, 2008：178.

[5] 李文荣，张全信. 函数方程与微分方程的解析解[M]. 北京：科学出版社，2007：106.
Li Wenrong，Zhang Quanxin. Resolution of Functionnal Equation and Differential Equation[M]. Beijing：Science Press，2007：106.

（责任编辑：罗立宇）