第24卷第1期　　　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　　　Vol.24 No.1
2010年1月　　　　Journal of Hunan University of Technology　　　　Jan. 2010

Hilbert重级数定理的一个新改进

周　昱，高明哲

（吉首大学 师范学院，湖南 吉首 416000）

摘　要：利用Euler-Maclaurin求和公式并且通过引入一个适当的权函数，创建了Hilbert重级数定理的一个新改进。作为应用，给出了Hardy-Littlewood定理的一个加强的结果。

关键词：Hilbert定理；重级数；权函数；β函数；Euler-Maclaurin求和公式。

中图分类号：0173　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0012-04

New Improvement of Hilbert's Theorem For Double Series

Zhou Yu，Gao Mingzhe

（Normal College，Jishou University，Jishou Hunan 416000，China）

Abstract：New improvement of Hilbert theorem for double series can be established by means of Euler-Maclaurin summation and by introducing a proper weight function. As an application, the enhanced result of Hardy-Littlewood's theorem is given.

Keywords：Hilbert's theorem; double series; weight function; β function; Euler-Maclaurin summation

0　引言

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是2个实数序列，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \text{且} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty,$$

那么

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2 \le \pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right), \tag{1}$$

其中常数因子π是最佳的，并且式（1）中等式成立的充要条件是$\{a_n\}$、或者$\{b_n\}$是0序列。这就是著名的Hilbert重级数定理，与不等式（1）相应的积分形式是：

$$\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \le \left(\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x\right)。\tag{2}$$

近年来，不等式（1）和（2）的各种改进和推广出现在大量的文献中（见文献[1]）。特别是文献[2]给出了不等式（2）一个有意义的改进，建立了下列不等式：

$$\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^4 \le$$

$$\pi^4\left\{\left(\int_0^{\infty}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_0^{\infty}k(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}\cdot$$

$$\left\{\left(\int_0^{\infty}g^2(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_0^{\infty}k(x)g^2(x)\mathrm{d}x\right)^2\right\}, \tag{3}$$

其中$k(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{c(xt^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t - c(x)$.

$(1-c(x)+c(y)\ge 0)$。

特别当$c(x)=\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{x}$时，可得：

$$k(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{x}} \quad \cos\sqrt{x}\right)。$$

本文的目的是要创建一个形如式（3）的离散型不

收稿日期：2009-06-06

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（09C789）

通信作者：周　昱（1970-），男（苗族），湖南保靖人，吉首大学副教授，主要研究方向为实函数，E-mail: hong2990@163.com

等式，从而给出式（1）的一个新改进，并给出Hardy-Littlewood定理的一个加强结果。为了证明论断，需要下列引理。

引理1　设 $0<m<2$，那么

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2}}。\qquad（4）$$

证明　由 β 函数的定义知：

$$B(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{d}u,\ (\mathrm{Re}\,p>0,\ \mathrm{Re}\,q>0),$$

因此有：

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{x^{-1+m/2}}{2(1+x)}\mathrm{d}x=\frac12\int_0^1 u^{-\frac m2}(1-u)^{\frac m2-1}\mathrm{d}u=$$
$$\frac12 B\left(1-\frac m2,\frac m2\right)=\frac12\Gamma\left(1-\frac m2\right)\Gamma\left(\frac m2\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2}},$$

其中$\Gamma(x)$是γ函数。

引理2　设

$$\tilde\omega(n)=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12},\ f(t)=\frac{1}{1+t}\left(\frac1t\right)^{\frac12},$$

那么

$$\tilde\omega(n)=\pi-\frac{\tilde\theta(n)}{\sqrt n},\qquad（5）$$

其中$\tilde\theta(n)>0$，并且$\tilde\theta(n)$由下式定义：

$$\tilde\theta(n)=2\sqrt n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt n}-\frac{n}{2(n+1)}-$$
$$\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\sqrt n B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac1n\right)^{2k}f^{(2k-1)}\left(\frac1n\right)+\rho_s,\qquad（6）$$

其中：B_j是Bernoulli数，即$B_2=\frac16$，$B_4=-\frac1{30}$，$B_6=\frac1{42}$，等等；

ρ_s是余项，它与$\sum_{k=1}^{s}\frac{\sqrt nB_{2k}}{(2k)!}\left(\frac1n\right)^{2k}f^{(2k-1)}\left(\frac1n\right)$的倒数第一项有相同符号且绝对值较小。

这些结果的证明已在文献[3]中给出，这里从略。

2　定理及其应用

为了给出式（1）的一个新改进，定义1个函数：

$$\omega_r(n)=\frac1{n^r}\left\{(\sec(r\pi)-1)\pi-2\int_0^{1/\sqrt n}\frac{t^{-2r}-1}{1+t^2}\mathrm{d}t\right\}+\sqrt n\,\theta_r(n),\qquad（7）$$

其中

$$\theta_r(n)=\frac{1-\frac1{n^r}}{2(n+1)}+\frac{\xi}{12(n+1)}\left\{\frac{n+3}{2(n+1)}\left(1-\frac1{n^r}\right)+r\right\},$$

$$(0<\xi<1)。$$

定理1　设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是2个实数序列，$c(x)$在区间$(0,+\infty)$上可导，并且$c(x)$满足条件：

$$1-c(n)+c(m)\ge0,\ (n,m\in N),\ 0<r<\frac12。$$

如果$0<\sum_{n=1}^\infty a_n^2<+\infty$且$0<\sum_{n=1}^\infty b_n^2<+\infty$，那么

$$\left(\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_mb_n}{m+n}\right)^4<$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^\infty\left(\pi-\frac{\tilde\theta(n)}{\sqrt n}\right)a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^\infty\omega_r(n)a_n^2\right)^2\right\}\cdot$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^\infty\left(\pi-\frac{\tilde\theta(n)}{\sqrt n}\right)b_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^\infty\omega_r(n)b_n^2\right)^2\right\},\qquad（8）$$

其中$\tilde\theta(n)>0$且它由式（6）给出，而$\omega_r(n)$由式（7）定义。

证明　首先假定$b_n=a_n$，应用Cauchy不等式，可以得到

$$\left(\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_ma_n}{m+n}\right)^2=$$
$$\left(\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_ma_n}{m+n}(1-c(n)+c(m))\right)^2=$$
$$\left(\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{a_m[1-c(n)+c(m)]^{1/2}}{(m+n)^{1/2}}\left(\frac mn\right)^{\frac14}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left(\frac{a_n[1-c(n)+c(m)]^{1/2}}{(m+n)^{1/2}}\left(\frac nm\right)^{\frac14}\right)\right)^2\le J_1J_2,\qquad（9）$$

其中：

$$J_1=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac mn\right)^{\frac12}(1-c(n)+c(m));$$

$$J_2=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n^2}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}(1-c(n)+c(m)),$$

容易算出：

$$J_1=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\frac{a_m^2}{m+n}\left(\frac mn\right)^{\frac12}(1-c(n)+c(m))=$$
$$\sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}\right)a_n^2(1-c(m)+c(n))=$$
$$\left(\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}\right)a_n^2-\sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{m=1}^\infty\frac{c(m)}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}\right)a_n^2+$$
$$\sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}\right)a_n^2c(n)=$$
$$\sum_{n=1}^\infty\left(\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m+n}\left(\frac nm\right)^{\frac12}\right)a_n^2-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(m)}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(n)}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\right\}a_n^2=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2-\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2,$$

其中:$\tilde{\omega}(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\omega(n)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(c(m)-c(n)\right)。$$

同理可得:

$$J_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)a_n^2\left(1-c(n)+c(m)\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2, \tag{11}$$

因此,从式(9)、(10)和(11)可以得到:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}\right)^2<$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2-\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2\right)\cdot$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2\right)=$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2\right)^2。 \tag{12}$$

如果$b_n\neq a_n$,那么应用Cauchy-Schwarz不等式估计式(8)的右边,然后利用公式(12)可得:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2=$$
$$\left\{\left(\int_0^1\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^{m-\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n t^{n-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t\right)\right\}^2\leq$$
$$\left\{\int_0^1\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^{m-\frac{1}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n t^{n-\frac{1}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\right\}^2=$$
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}\right)^2\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_m b_n}{m+n}\right)^2=$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)a_n^2\right)^2\right\}\cdot$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\omega}(n)b_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)b_n^2\right)^2\right\}。 \tag{13}$$

下面来计算$\omega_r(n)$。设

$$f(x)=\frac{1}{x+n}\left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c(x)-c(n)\right),$$

$c(x)$如果4阶可导且$f^{(2r)}(x)>0,\ f^{(2r-1)}(x)<0$,$f^{(s)}(\infty)=0,\ (s=0,1,2,3)$,$\int_n^{\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$,那么由改进的Euler-Maclaurin求和公式(参阅文献[4-5])得到:

$$\omega(n)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(c(m)-c(n)\right)=$$
$$\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(1)-\frac{\xi}{12}f'(1)=$$
$$\int_{1/n}^{\infty}\frac{c(nu)-c(n)}{1+u}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\frac{\left(c(1)-c(n)\right)\sqrt{n}}{2(n+1)}+$$
$$\frac{\sqrt{n}\,\xi}{12(n+1)}\left\{\frac{n+3}{2(n+1)}\left(c(1)-c(n)\right)-c'(1)\right\}=$$
$$2\int_{1/\sqrt{n}}^{\infty}\frac{c(nt^2)-c(n)}{1+t^2}\mathrm{d}t+\sqrt{n}\,\theta(n), \tag{14}$$

其中:$0<\xi<1$;

$$\theta(n)=\frac{c(1)-c(n)}{2(n+1)}+$$
$$\frac{\xi}{12(n+1)}\left\{\frac{n+3}{2(n+1)}\left(c(1)-c(n)\right)-c'(1)\right\}。$$

特别,取$c(x)=x^{-r}$,$\left(0<r<\frac{1}{2}\right)$。显然,根据式(14)得到式(7),从式(13),(14)和引理2可得:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2\leq$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}\right)a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_r(n)a_n^2\right)^2\right\}\cdot$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}\right)b_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_r(n)b_n^2\right)^2\right\}, \tag{15}$$

因为$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是2个非0的实数序列,所以式(15)中不能取等号,从而不等式(8)成立,于是定理被证明。特别,当$c(x)=\mathrm{constant}$时,从式(10)可看出:$\omega(n)=0$,从而$\omega_r(n)=0$。因此,不等式(8)可以简化为下列形式:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^2<$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}\right)a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}\right)b_n^2\right), \tag{16}$$

这就是文献[3]的结果,可见不等式(8)是文献[3]相应结果的一个改进。由于函数$c(x)$的选择具有较大的灵活性,它表明不等式(13)具有一般性。注意到$\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}>\pi$,因此在式(13)中如果用$\pi$代替$\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}$,那么从式(13)和式(14)可得式(3)相应的结果:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\right)^4<$$
$$\pi^4\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}k(n)a_n^2\right)^2\right\}\cdot$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}k(n)b_n^2\right)^2\right\},$$

其中

$$k(n)=\frac{2}{\pi}\int_{1/\sqrt{n}}^{\infty}\frac{c(nt^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t-$$
$$\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)c(n)+\frac{\sqrt{n}\theta(n)}{\pi}。$$

下面给出式（8）的一个应用。设 $f(x)\in L^2(0,1)$，且 $f(x)\neq 0$。定义 1 个序列：

$$a_n=\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\ ,(n=0,1,2,\cdots)。$$

Hardy-Littlewood [6]证明了：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2<\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x, \tag{17}$$

其中 π 是最佳值，这就是著名的 Hardy-Littlewood 定理。下面给出它的一个改进。

定理 2　设 $f(x)\in L^2(0,1)$ 且 $f(x)\neq 0$，$c(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上可导，且它满足条件：$1-c(n)+c(m)\geq 0$。定义 1 个序列：

$$a_n=\int_0^1 x^{n-1/2}f(x)\mathrm{d}x,\quad (n=1,2,\cdots),$$

那么

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^2<$$
$$\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi-\frac{\tilde{\theta}(n)}{\sqrt{n}}\right)a_n^2\right)^2-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_r(n)a_n^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x, \tag{18}$$

其中 $\omega_r(n)$ 由式（7）给出。

证明　根据假设，可以把 a_n^2 改写成下列形式：

$$a_n^2=\int_0^1 a_n x^{n-1/2}f(x)\mathrm{d}x,$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式估计 式（18）的右边如下：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n x^{n-1/2}f(x)\mathrm{d}x\right)^2=$$
$$\left\{\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1/2}\right)f(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leq$$
$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1/2}\right)^2\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_m a_n x^{m+n-1}\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=$$
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}\right)\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\ , \tag{19}$$

从定理 1 和不等式（19）可知式（18）成立。

参考文献：

[1] 高明哲，徐利治. Hilbert 不等式的各种精化与拓广综述[J]. 数学研究与评论，2005，25 (2)：227−243.
Gao Mingzhe, Xu Lizhi. A Survey of Various Refinements and Generalizations of Hilbert's Inequalities[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，2005，25(2)：227−243.

[2] Hu Ke. On Hilbert's Inequality[J]. Chin. Ann. Math.: Ser. B，1992，13(1)：35−39.

[3] Gao Mingzhe. A Note on the Hardy-Hilbert Inequality[J]. J. Math. Anal. Appl，1996，204(1)：346−351.

[4] 徐利治，王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 北京：高等教育出版社，1985：81−98.
Xu Lizhi，Wang Xinghua. Mathematical Analysis Methods and Selected Examples[M]. Beijing：Higher Education Press，1985：81−98.

[5] Gao Mingzhe，Yang Bicheng. On the Extended Hilbert's Inequality[J]. Proc. Amer. Math. Soc，1998，126(3)：751−759.

[6] Hardy G H， Littlewood J E，Polya G. Inequalities[M]. Cambridge：Cambridge Univ. Press，1952.

（责任编辑：罗立宇）