第24卷第1期　　　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　　　Vol.24 No.1
2010年1月　　　　Journal of Hunan University of Technology　　　　Jan. 2010

沿抛物线的Hilbert变换的多线性交换子的有界性

聂　芬

（国防科学技术大学 理学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：考虑抛物型BMO函数和沿抛物线$\gamma(t)=(t,t^2)$的Hilbert变换生成的多线性交换子，通过Fourier变换估计和bootstrap讨论，得到所考虑的多线性交换子的$L^p(\mathbb{R}^2)$有界性。

关键词：多线性交换子；沿抛物线的Hilbert变换；极大算子

中图分类号：O151.23　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0001-04

Boundedness of Multilinear Commutators of Hilbert Transforms Along Parabola

Nie Fen

（College of Science，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：Considers the multilinear commutators of parabolic BMO function and Hilbert transforms along parabola $\gamma(t)=(t,t^2)$. With Fourier transform estimation and the bootstrap method, proves that the multilinear commutators are bounded on $L^p(\mathbb{R}^2)$ spaces.

Keywords：multilinear commutators；Hilbert transform along parabola；maximal operators

1　背景知识

文献[1] 引入了一类多线性交换子

$$T_{\vec{b}}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{m}\left(b_i(x)-b_i(y)\right)K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

且证明了一定条件下$T_{\vec{b}}$是$L^p(\mathbb{R}^n)$有界的。文献[2]研究了沿抛物线的Hilbert变换

$$H_\gamma f(x)=p.v.\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x_1-t,x_2-t^2\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

与跟ρ相关的抛物型BMO函数生成的k阶交换子的$L^p(\mathbb{R}^2)$有界性，其中$\rho(x_1,x_2)=\left(x_1^4+x_2^2\right)^{\frac{1}{4}}$。受文献[1-2]的影响，本文引入沿抛物线的Hilbert变换H_γ与跟ρ相关的抛物型BMO函数生成的多线性交换子。设$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，定义$\vec{b}$和$H_\gamma$生成的多线性交换子为

$$H_{\vec{b}}f(x)=H_\gamma\left(\prod_{i=1}^{m}\left(b_i(x)-b_i(\bullet)\right)f\right)(x)。\qquad（1）$$

问当$b_i\in BMO^\rho(\mathbb{R}^2)\,(i=1,2,\cdots,m)$时，$H_{\vec{b}}$是否为$L^p(\mathbb{R}^2)\,(1<p<\infty)$上的有界算子。相应于算子$H_{\vec{b}}$，同时考虑极大算子

$$\mathfrak{M}_{\vec{b}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\prod_{i=1}^{m}\left|b_i(x)-b_i(x-\gamma(t))\right|\left|f(x-\gamma(t))\right|\mathrm{d}t。\qquad（2）$$

为方便叙述，先引入一些记号[3]：

对于任意正整数m，当$1\le j\le m$时，记$C_j^m=\{\{\sigma:\sigma=\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(j)\}$为$\{1,2,\cdots,m\}$中含有$j$个不同元素的集合$\}$;

对于$\sigma\in C_j^m$，记$\sigma'=\{1,2,\cdots,m\}/\sigma$；对于$1\le j\le m$

收稿日期：2009-08-12

通信作者：聂　芬（1983-），女，湖南涟源人，国防科学技术大学教师，硕士，主要研究方向为调和分析，
E-mail：niefen321@163.com

和$\sigma=\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(j)\}\in C_j^m$，记

$$\vec{b}_\sigma=\{b_{\sigma(1)},b_{\sigma(2)},\cdots,b_{\sigma(j)}\},$$

$$b_\sigma=\prod_{i=1}^{j}b_{\sigma(i)}，\left\|\vec{b}_\sigma\right\|_{BMO}=\prod_{i=1}^{j}\left\|b_{\sigma(i)}\right\|_{BMO}。$$

本文中，只对$\vec{b}$的分量为抛物型BMO函数的向量进行讨论，即：

$$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)\ b_i\in BMO^\rho(\mathbb{R}^2)(i=1,2,\cdots,m)。$$

2 主要结论

定理1 限定条件下的$\vec{b}$，对任意$1<p<\infty$，由式（1）所定义的算子$H_{\vec{b}}f(x)$及由式（2）所定义的算子$\mathfrak{M}_{\vec{b}}f(x)$，都是$L^p(\mathbb{R}^2)$上以$\|\vec{b}\|_{BMO^\rho(\mathbb{R}^2)}$为界的有界算子。

为了证明定理1，先证明1个更一般的结果，即定理2。

定理2 设$\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$是一列Borel测度，假定对某个正常数C和α，$\|v_j\|\le C$，

$$\left|\hat{v}_j(\xi)\right|\le C\min\left\{\left[\rho(\delta_{2^j}\xi)\right]^\alpha,\left[\rho(\delta_{2^j}\xi)\right]^{-\alpha}\right\},$$

$$\left|\hat{v}_j(\delta_{2^j}\xi_1)-\hat{v}_j(\delta_{2^j}\xi_2)\right|\le|\xi_1-\xi_2|。$$

其中：$\hat{v}_j$是v_j的Fourier变换。

对于$\vec{b}$，定义算子$T_{\vec{b}}$和$G_{\vec{b}}$为：

$$T_{\vec{b}}f(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-b_i(x-y))f(x-y)\mathrm{d}v_j(y),$$

$$G_{\vec{b}}f(x)=$$

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-b_i(x-y))f(x-y)\,\mathrm{d}v_j(y)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则$T_{\vec{b}}$和$G_{\vec{b}}$都是$L^2(\mathbb{R}^2)$上以$C\|\vec{b}\|_{BMO^\rho(\mathbb{R}^2)}$为界的有界算子，进一步，设$u_j=|v_j|$，假若对某个$1<q<\infty$，下列2个极大算子

$$\tilde{\mathfrak{M}}f(x)=\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}|f(x-y)|\mathrm{d}u_j(y),$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\vec{b},2}f(x)=$$

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-b_i(x-y))^2\ f(x-y)\ \mathrm{d}u_j(y)$$

都是$L^q(\mathbb{R}^2)$上的有界算子，则当$\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2q}$时，$T_{\vec{b}}$和$G_{\vec{b}}$都是$L^p(\mathbb{R}^2)$上的有界算子。

3 相关引理与定理的证明

首先证明一个在证明定理过程中非常重要的引理，即引理1。

引理1 设$m_s\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)(s>0)$是一族乘子，满足$\mathrm{supp}m_s\subset\left\{\frac{s}{4}\le\rho(x)\le4s\right\}$，假定对某些正常数$C$和$\alpha$有：

$$|m_s|_\infty\le\min\{s^\alpha,s^{-\alpha}\},$$

$$|m_s(\xi_1)-m_s(\xi_2)|\le C(|\xi_1-\xi_2|+|\rho(\xi_1)-\rho(\xi_2)|)。$$

记T_s为乘子算子$\widehat{T_sf}(\xi)=m_s(\xi)\hat{f}(\xi)$（见文献[2]），对$\vec{b}$，记$T_{s,\vec{b}}$为$T_s$的多线性交换子，对任何固定的$0<v<1$，存在正常数$C$，使得

$$\left\|T_{s,\vec{b}}f\right\|_2\le C\min\{s^{\alpha v},s^{-\alpha v}\}\|\vec{b}\|_{BMO^\rho(\mathbb{R}^2)}\|f\|_2。$$

证明 如文献[2]分解m_s的Fourier逆变换K_s，由文献[2]知，对$q>2$，$0<\theta<1$，

$$\|T_{s,j}\|_q<C\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q}}s^{\frac{3}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}\|f\|_q。\quad(3)$$

现计算$T_{s,j}$的多线性交换子$T_{s,j,\vec{b}}$的$L^2(\mathbb{R}^2)$有界性。令$\mathbb{R}^2=\bigcup_d Q_d$，其中$Q_d$为抛物型方体，即对某$(x_1^d,x_2^d)\in\mathbb{Z}^2$，

$$Q_d=\left[x_1^d-\frac{2^j}{2},x_1^d+\frac{2^j}{2}\right]\times\left[x_2^d-\frac{2^{2j}}{2},x_2^d+\frac{2^{2j}}{2}\right]。$$

这些抛物型方体内部不相交，令$f_d(x)=f(x)\chi_{Q_d}(x)$，则$f(x)=\sum_d f_d(x)$， a.e. $x\in\mathbb{R}^2$。

对每个d，$T_{s,j,\vec{b}}$的支集包含在$20Q_d$内，且$T_{s,j,\vec{b}}f_d$的支集是有限交，从而

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{s,j,\vec{b}}f(x)\right|^2\mathrm{d}x\le C\sum_d\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{s,j,\vec{b}}f_d(x)\right|^2\mathrm{d}x。$$

假定supp f包含在某个抛物型方体Q内，将Q放大50倍，记为Q^*，$\lambda_i=(b_i)_{Q^*}$，$i=1,2,\cdots,m$，以及$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$。则

$$\left|T_{s,j,\vec{b}}f(x)\right|=\int_{\mathbb{R}^2}K_{s,j}(x-y)f(y)\left|\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-b_i(y))\right|\mathrm{d}y=$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}K_{s,j}(x-y)f(y)\left|\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-\lambda_i)+(-1)^m\prod_{i=1}^{m}(b_i(y)-\lambda_i)+\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_j^m}C_{m,j}(b(x)-\lambda)_\sigma(b(y)-\lambda)_{\sigma'}\right|\mathrm{d}y。$$

取$2<q_1,q_2<\infty$，使得$\frac{1}{2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$，对满足$\sigma\in C_i^m$的固定的$i$，有

$\operatorname{supp} T_{s,j}\left((b(x)-\lambda)_{\sigma'} f\right) \subset 20Q \subset Q^{*}$。

由估计式（3）和Hölder不等式知

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{s,j,\vec{b}}f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le C\left(\int_{Q^*}\left|\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-\lambda_i)\right|^{q_2} dx\right)^{\frac{1}{q_2}}\cdot$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{s,j}f(x)\right|^{q_2'}dx\right)^{\frac{1}{q_2'}} + CQ^{\frac{1}{q_2}}\cdot$$

$$\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q_1}} s^{\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_1}\right)}\left\|\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-\lambda_i)f\right\|_{q_1} +$$

$$C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|b(x)-\lambda\right|_{\sigma}^{q_2}dx\right)^{\frac{1}{q_2}}\cdot$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{s,j}\left(b(x)-\lambda\right)_{\sigma'}f(x)\right|^{q_2'}dx\right)^{\frac{1}{q_2'}} \le C\prod_{i=1}^{m}|Q^*|^{\frac{1}{q_2}}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{|Q^*|}\int_{\mathbb{R}^2}\left|(b_i(x)-\lambda_i)\right|^{mq_2}dx\right)^{\frac{1}{mq_2}}\left\|T_{s,j}f\right\|_{q_2'} +$$

$$CQ^{\frac{1}{q_2}}\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q_1}}\cdot$$

$$s^{\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_1}\right)}\left\|\prod_{i=1}^{m}(b_i(x)-\lambda_i)\right\|_{q_1'(2/q_1)'}\|f\|_2 +$$

$$C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_i^m}2^{\frac{kj}{q_2}}\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q_1}}\cdot$$

$$s^{\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_1}\right)}\left\|(b(x)-\lambda)_{\sigma'}f(x)\right\|_{q_1} \le$$

$$C2^{\frac{kj}{q_2}}\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q_1}} s^{\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_1}\right)}\left(\|f\|_{q_1}+\right.$$

$$\prod_{i=1}^{m}Q^{*\frac{1}{q_1'(2/q_1)'}}\|b_i(x)-\lambda_i\|_{mq_1'(2/q_1)'}\|f\|_2 +$$

$$\left.\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left\|(b(x)-\lambda)_{\sigma'}\right\|_{q_1'(2/q_1)'}\|f\|_2\right) \le$$

$$C2^{kj\left(\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_1'(2/q_1)'}\right)}\left(2^{-j(1-\theta)}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\right)^{\frac{2}{q_1}} s^{\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_1}\right)}\|f\|_2。$$

对固定的$0<\nu<1$，取$0<\theta<1$，且充分接近1，$q_1, q_2>2$，充分接近2，且$\frac{2\theta}{q_1}>\nu$，

$$1-\theta>\bar{k}\left(\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_1'\left(\frac{2}{q_1'}\right)'}\right),\quad \frac{2\alpha\theta}{q_1}-\bar{k}\left(1-\frac{2}{q_2}\right)>\alpha\nu。$$

存在一个与j无关的常数$\kappa<0$，使得

$$\left\|T_{s,j,\vec{b}}f\right\|_2 \le C2^{\kappa j}\min\{s^{\alpha\theta},s^{-\alpha\theta}\}\|f\|_2。$$

对所有的$j\ge 0$求和即可得到引理1的结果。

定理2的证明　取径向函数$\varphi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，$0\le\varphi\le 1$，$\operatorname{supp}\varphi\subset\left\{\frac{1}{4}\le|x|\le 4\right\}$，且$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi\left(2^{-l}\xi\right)=1$，$\xi\ne 0$。定义乘子算子$S_l$为$\widehat{S_l f}(\xi)=\varphi\left(2^{-l}\rho(\xi)\right)\hat{f}(\xi)$，记$m_j(\xi)=\hat{\nu}_j(\xi)$，$m_j^l(\xi)=m_j(\xi)\varphi\left(2^{j-l}\rho(\xi)\right)$。

定义乘子算子$\widehat{T_j^l f}(\xi)=m_j^l(\xi)\hat{f}(\xi)$。记

$$U_l f(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\left(S_{l-j}T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}}f\right)(x)。$$

由单位分解定理可知，对于$f,h\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$有下列式子成立：

$$\int_{\mathbb{R}^2}h(x)T_{\vec{b}}f(x)dx=\int_{\mathbb{R}^2}h(x)\sum_l U_l f(x)dx。$$

要证明$T_{\vec{b}}f(x)$的$L^2(\mathbb{R}^2)$有界性，只须证明存在某个正常数θ，使得对$l\in\mathbb{Z}$有

$$\|U_l f\|_2 \le C\|\vec{b}\|_{BMO^m(\mathbb{R}^2)}\min\{2^{-\theta l},2^{\theta l}\}\|f\|_2。$$

对$f,h\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，直接计算有

$$\int_{\mathbb{R}^2}h(x)U_l f(x)dx=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\int_{\mathbb{R}^2}h(x)\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{l-j,\vec{b}_\sigma}\left(T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}_{\sigma'}}f(x)dx。$$

由文献[4]中引理3.2.3知

$$\|U_l f\|_p = C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{l-j,\vec{b}_\sigma}\left(\left(T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}_{\sigma'}}f\right)\right\|_p \le$$

$$C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left\|\vec{b}_\sigma\right\|_{BMO^m(\mathbb{R}^2)}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left(T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}_{\sigma'}}f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p。\qquad(4)$$

定义$\tilde{T}_j^l$为$\widehat{\tilde{T}_j^l f}(\xi)=m_j^l\left(\delta_{2^j}\xi\right)\hat{f}(\xi)$，$T_{j,\vec{b}_\sigma}^l$为$\tilde{T}_j^l$的多线性交换子，由文献[2]知$m_j^l\left(\delta_{2^j}\xi\right)$满足引理1的条件，由伸缩不变性知

$$\left\|T_{j,\vec{b}_\sigma}^l f\right\|_2=\left\|\tilde{T}_{j,\vec{b}_\sigma}^l f\right\|_2 \le$$

$$C\left\|\vec{b}_\sigma\right\|_{BMO^m(\mathbb{R}^2)}\min\{2^{\theta l},2^{-\theta l}\}\|f\|_2。$$

对$f,h\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，令

$$\int_{\mathbb{R}^2}h(x)\left(T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}_{\sigma'}}f(x)dx=$$

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\int_{\mathbb{R}^2}h(x)T_{j,\vec{b}_{\sigma_1}}^l\left(S_{l-j,\vec{b}_{\sigma_1'}}f\right)(x)dx。$$

由不等式（4）和Hölder不等式知

$$\|U_l f\|_2 \le C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left\|\vec{b}_\sigma\right\|_{BMO^m(\mathbb{R}^2)}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left(T_j^l S_{l-j}f\right)_{\vec{b}_{\sigma'}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \le$$

$$C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\left\|\vec{b}_\sigma\right\|_{BMO^m(\mathbb{R}^2)}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^2}\left|T_{j,\vec{b}_{\sigma_1}}^l\left(S_{l-j,\vec{b}_{\sigma_1'}}f\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\left\|\vec{b}_{\sigma'}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\left\|\vec{b}_{\sigma_1}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\cdot$$

$$\min\left\{2^{\theta l},2^{-\theta l}\right\}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left\|S_{l-j,\vec{b}_{\sigma_1}}f\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\left\|\vec{b}_{\sigma'}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\left\|\vec{b}_{\sigma_1}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\cdot$$

$$\min\left\{2^{\theta l},2^{-\theta l}\right\}\left\|\vec{b}_{\sigma_1}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\|f\|_2=$$

$$C\min\left\{2^{\theta l},2^{-\theta l}\right\}\|f\|_2\text{。}\qquad(5)$$

现在考虑$T_{l,j}f(x)$的$L^p(\mathbb{R}^2)$有界性，只须考虑$p>2$的情况，当$p<2$的情况，可利用标准的对偶性讨论得到，若$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}_{\vec{b},2}$都是$L^p(\mathbb{R}^2)$上的有界算子，显然可以证明下列估计式成立：

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\gamma_{j,\vec{b}_\sigma}^{j}g_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|g_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p,\qquad(6)$$

令$\left(T_j^l S_{l-j}\right)_{\vec{b}_\sigma}f(x)=\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}v_{j,\vec{b}_{\sigma_1}}\left(S_{l-j,\vec{b}_{\sigma'}}\right)(x)$，

由不等式（4）和文献[4]中的引理3.2.3，可得

$$\left\|U_lf\right\|_p\le C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\left\|\vec{b}_{\sigma'}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\cdot$$

$$\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|v_{j,\vec{b}_{\sigma_1}}\left(S_{l-j,\vec{b}_{\sigma'}}f\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le$$

$$C\sum_{i=0}^{m}\sum_{\sigma\in C_i^m}\sum_{k=0}^{i}\sum_{\sigma_1\in C_k^i}\left\|\vec{b}_{\sigma'}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\cdot$$

$$\left\|\vec{b}_{\sigma_1}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\left\|\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|S_{l-j,\vec{b}_{\sigma_1}}f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le$$

$$C\left\|\vec{b}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\|f\|_p\text{。}\qquad(7)$$

由式（5)、(7）以及Riesz-Thorin插值定理得，对$\frac{1}{2}-\frac{1}{p}<\frac{1}{2q}$，

$$\left\|U_lf\right\|_p\le C\min\left\{2^{\tilde{\theta}l},2^{-\tilde{\theta}l}\right\}\left\|\vec{b}\right\|_{BMO^{\rho}(\mathbb{R}^2)}\|f\|_p\text{。}$$

其中：$\tilde{\theta}=\tilde{\theta}_p$是正常数，这就得到了$T_{\vec{b}}$的$L^p(\mathbb{R}^2)$估计。利用文献[5]中Rademancher函数系的讨论，可得到$G_{\vec{b}}$的$L^2(\mathbb{R}^2)$和$L^p(\mathbb{R}^2)$的有界性估计。定理1可由定理2和bootstrap讨论（参见文献[6]）得到。

参考文献：

[1] Perez C，Trujillo-Gonealee R. Sharp Weighted Estimates for Multilinear Commutateors[J]. London Math. Soc.，2002，65(2)：672-692.

[2] 鲁志波. 沿抛物线(t, t^2)的Hilbert变换的交换子的$L^p(\mathbb{R}^2)$有界性[J]. 数学年刊A辑：中文版，2005，26(5)：709-720.
Lu Zhibo. $L^p(\mathbb{R}^2)$ Boundedness for the Commutator of Hilbert Transform along the Parabola (t, t^2)[J]. Chinese Annals of Mathematics：series A，2005，26(5)：709-720.

[3] 周伟军，马柏林，徐景实. 分数次多线性交换子在Herz空间上的有界性[J]. 系统科学与数学，2005，25(2)：160-169.
Zhou Weijun，Ma Bolin，Xu Jingshi. Boundedness of Fractional Multilinear Commutators on Herz Space[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2005，25(2)：160-169.

[4] 聂 芬. 沿特殊曲线的Hilbert变换的交换子的有界性[D]. 长沙：湖南大学数学与计量经济学院，2008.
Nie Fen. The Boundedness of Commutators with Hilbert Transforms along Special Curves[D]. Changsha：Hunan University College of Mathematics and Econometrics，2008.

[5] Stein E M. Singular Integrals and Differe-Ntiability Properties of Functions[M]. Princeton N J：Princeton Univ. Press，1970：141-158.

[6] 徐景实. 广义Morrey空间上的奇异积分多线性交换子[J]. 数学年刊A辑：中文版，2006，27(1)：83-92.
Xu Jingshi. Multilinear Commutators of Singular Integulars in Generalized Morrey Spaces[J]. Chinese Annals of Mathematics：series A，2006，27(1)：83-92.

（责任编辑：廖友媛）