第23卷第6期
2009年11月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.23 No.6
Nov. 2009

基于复合几何随机过程冲击模型的可靠性分析

刘罗华

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘 要：建立了一类系统受冲击损伤的数学模型，在系统工作环境承受冲击损伤的到来服从几何分布、冲击引起的损伤服从指数分布的条件下，讨论了系统损伤未达到危险临界值z的概率、平均损伤、引起系统失效的冲击次数的均值及系统损失效率等相关可靠性指标。

关键词：冲击模型；系统损伤；可靠性指标

中图分类号：O211.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)06-0015-02

Reliability Analysis Based on Complex Geometric Shock Model of Random Process

Liu Luohua

(School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract: Established a mathematical model of system impact damage. Under the conditions that system working environment absorbing the coming shocks obeys geometric distribution and impact damage obeys the index distribution, discussed the related reliability index of the probability of risk threshold z of the system, the average risk, the mean number of shocks caused the system failure and the efficiency of system losses.

Keywords: shock model; system damage; reliability index

冲击模型是可靠性数学理论中的主要内容之一，对它的研究由来已久，最先Esary等人[1]在基础过程是齐次Poisson过程的情况下研究了系统的寿命分布，得到了生存函数的IFR、IFRA与NBU等性质；随后A-Hameed等人[2]将基础过程推广至非齐次Poisson过程，指出在相应条件下，有限个组件的串联系统寿命的IFRA与NBU等性质仍是可以保证的；在国内，李泽慧等人[3]展开了关于冲击模型在客户管理及风险理论等方面的应用研究；张雅清等人[4]研究了复合Poisson损伤过程的若干性质；严克明等人[5]研究了复合Poisson损伤过程中当冲击造成的损伤随时间呈指数衰减时系统损伤的平均损伤及可靠度等性质。本文以风险模型中保险的理赔作为研究背景，将总索赔过程看成为1个系统冲击模型，在系统工作环境承受冲击损伤的到来服从几何分布、冲击引起的损伤服从指数分布的条件下，讨论了系统损伤未达到危险临界值z的概率、平均损伤、引起系统失效的冲击次数的均值及系统损失效率等可靠性指标。

1 冲击模型的建立

在保险理赔中，将免赔保险总索赔过程看成为1个系统冲击模型：系统每次承受冲击次数$N(t)$是1个随机变量；系统每次造成的实际损伤x_n（n=1, 2, ⋯）是不同的，它是1个随机变量；在大多数情况下可以认为每次冲击引起的系统损伤x_n（n=1, 2, ⋯）是独立同分布的；各次冲击引起系统的损伤有累积的效应，即冲击引起的系统损伤是可以叠加的：$\sum_{n=0}^{N(t)} x_n$。

收稿日期：2009-10-12

基金项目：国家自然科学基金资助项目（50675161、60705035），国际科技合作重点项目（2006CA025），湖北省教育厅重大研究基金资助项目（Z200511001）

作者简介：刘罗华（1969-），男，湖南茶陵人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事金融风险随机研究，
E-mail：zzgxyllh@163.com

为建立系统的冲击模型，做如下假设：设在[0，t]时间内系统受到冲击的次数$N(t)$服从参数p的几何分布，并且第n次冲击造成的损害为x_n，并假设x_n（n=1, 2, …）相互独立且服从均值为λ的指数分布。设损害会累加，且当累计损害超过危险临界值$z\left(z\in\mathbf{R}^{+}\right)$时，系统失效，$T$为失效时间，则累计损伤模型可表述为：

$$\{T\le t\}\Leftrightarrow\left\{\sum_{n=0}^{N(t)}x_n<z\right\},\qquad(1)$$

$Y(t)=\sum_{n=0}^{N(t)}x_n$表示系统累计损伤，是1个复合几何过程，$F(z)=p\{Y(t)<z\}$记为系统分布函数。

2 冲击模型的可靠性指标

系统在t时刻的损伤未达到危险临界值z的$p\{Y(t)<z\}$体现了系统在t时刻还能正常工作的概率，它是评价系统的1个主要的可靠性指标。

定理1 累计损伤模型（1）中$Y(t)$在t时刻还能正常工作的概率：

$$p\{Y(t)<z\}=p+q\left(1-\mathrm{e}^{-p\lambda z}\right),\ z\ge 0,\ q=1-p。$$

证明 因为$M_{N(t)}=\dfrac{p}{1-q\mathrm{e}^{t}}$，$M_{x(t)}=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$，$t<\lambda$，则$M_{Y(t)}=M_N\left[\ln M_{x(t)}\right]=\dfrac{p}{1-q\dfrac{\lambda}{\lambda-t}}=p+q\dfrac{p\lambda}{p\lambda-t}$。

因为1是单点分布$I(0)$的矩母函数，$\dfrac{p\lambda}{p\lambda-t}$是参数为$p$、$\lambda$的指数分布的矩母函数，所以系统累计损伤$Y(t)$的矩母函数为单点分布$I(0)$的矩母函数与参数为$p$、$\lambda$的指数分布的矩母函数的组合，组合系数分别为$p$和$q$。所以$Y(t)$在$t$时刻还能正常工作的概率为：

$$F(z)=p+q\left(1-\mathrm{e}^{-p\lambda z}\right)=1-q\mathrm{e}^{-p\lambda z},\ \ z\ge 0,$$

密度函数为：

$$f(z)=\begin{cases}p, & z=0;\\ qp\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda z}, & z>0。\end{cases}$$

系统受到冲击时，在t时刻的平均损伤$E[Y(t)]$反映了系统损伤的平均水平，它也是评价系统的1个主要的可靠性指标。

定理2 累计损伤模型（1）在t时刻的平均损伤：$E[Y(t)]=\dfrac{q}{p\lambda}$。

证明 $E[Y(t)]=\int_0^{\infty}yqp\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda y}\mathrm{d}y=$

$$\frac{q}{p\lambda}\int_0^{\infty}(-p\lambda y)\mathrm{e}^{-p\lambda y}\mathrm{d}(-p\lambda y)=\frac{q}{p\lambda}。$$

系统受到冲击失效所必需的冲击次数N的均值，是评价系统稳定性的1个重要的可靠性指标。

定理3 累计损伤模型（1）失效所必需的冲击次数N的均值：

$$E[N]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{A}(\lambda x)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)。$$

证明 因为$\{x_i,\ i=1,2,3,\cdots\}$是独立且同分布于参数为λ的指数分布，由准再生性可得$\sum_{i=1}^{k}x_i$服从于Γ（k，λ）的分布：

$$P\{N>k\}=P\left\{\sum_{i=1}^{k}x_1<A\right\}=\int_0^{A}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{A}(\lambda x)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x),$$

所以$E[N]=\sum_{k=1}^{n}P\{N>k\}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{A}(\lambda x)^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)$。

系统的骤然失效率也是评价系统稳定性的1个重要的可靠性指标。

定理4 累计损伤模型（1）的损失效率为：$\gamma(t)=p\lambda$。

证明 $\gamma(t)=\lim\limits_{\Delta s\to 0^{+}}\dfrac{p\left\{Y\le s+\Delta s\,|\,Y>s\right\}}{\Delta t}(s\ge 0)=$

$$\lim_{\Delta s\to 0^{+}}\frac{p\{s<Y\le s+\Delta s\}}{\Delta s\cdot p\{Y>s\}}=\lim_{\Delta s\to 0^{+}}\frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta s\cdot p\{Y>s\}}=$$
$$\frac{f(s)}{\overline{F}(s)}=\frac{f(s)}{1-F(s)}=\frac{qp\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda s}}{1-(1-q\mathrm{e}^{-p\lambda s})}=p\lambda。$$

参考文献：

[1] Esary J，Marshall A，Proschan F. The Annals of Probability [J]. Shock Models and Wear Process，1973，1(17)：627-649.

[2] A-Hameed M S，Proschan F. Nonstationary Shock Models [J]. Stochastic Processes and Their Applications，1973，1 (10)：383-404.

[3] 李泽慧，白建明，孔新兵. 冲击模型：进展与应用[J]. 数学进展，2007，36(4)：385-397.
Li Zehui，Bai Jianming，Kong Xinbing. Shock Models: Advances and Applications [J]. Advances in Matematics，2007，36(4)：385-397.

[4] 张雅清，王艳玲，李小红. 复合泊松过程在系统可靠性中的应用[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2007，35(1)：38-40.
Zhang Yaqing，Wang Yanling，Li Xiaohong. Application of Compound Poisson Process in System Reliability[J]. Journal of Henan Normal University：Natural Science，2007，35 (1)：38-40.

[5] 严克明，张民悦，张力远. 一类系统损伤模型的可靠性指标[J]. 甘肃工业大学学报，2003，29(1)：128-130.
Yan Keming，Zhang Minyue，Zhang Liyuan. Reliability Index of A Category of Damage Model[J]. Journal of Gansu University of Technology，2003，29(1)：128-130.

（责任编辑：罗立宇）