一类二阶中立型微分方程解的定性性质

陈云新

（南华大学 数理学院，湖南 衡阳 421001）

摘　要：讨论了一类具有无界时滞的二阶中立型微分方程，并建立了该方程非平凡解的振动性以及非振动解的渐近稳定性的充分条件。

关键词：中立型微分方程；振动性；渐近性；无界时滞

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)06-0011-04

Qualitative Properties of Solutions for a Second Order Neutral Differential Equation

Chen Yunxin

（School of Mathematics and Physics，University of South China，Hengyang Hunan 421001，China）

Abstract：Considers a class of second order neutral differential equations with unbounded delays and obtains some sufficient conditions for the oscillation of all nontrivial solutions and the asymptotic stability of nonoscillatory solutions.

Keywords：neutral differential equation；oscillation；asymptotic behavior；unbounded delay

0　引言

本文讨论一类二阶中立型微分方程解的振动性和渐近性。考虑下列二阶微分方程：

$$\left(x(t)-cx(\alpha t)\right)''+p(t)x(\sigma(t))=0,\quad t\ge t_0, \qquad (1)$$

这里：（i）$0<c\le 1$，$0<\alpha<1$为常数；

（ii）$p(t),\sigma(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty))$，$\sigma(t)\le t$，且$\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$。

方程（1）的1个解是指定义在(T,∞)上的1个连续函数$x(t)$，它在(t_0,∞)上满足方程（1），且$x(t)-cx(\alpha t)$具有二阶连续导数，这里$T=\min\left\{\inf\limits_{t\ge t_0}\sigma(t),\alpha t_0\right\}$。

习惯上，如果方程（1）的解有任意大的0点，则称其为振动的；如果它最终为正或为负，则称其为非振动的。近年来，中立型泛函微分方程引起了人们广泛的研究兴趣，并取得了丰富的研究成果[1-2]。特别地，关于n阶具有常时滞的微分方程：

$$\left[x(t)-P(t)x(t-\tau)\right]^{(n)}+Q(t)x(t-\sigma)=0, \qquad (2)$$

其中$P(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$，$Q(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^+)$，$\tau,\sigma\in(0,\infty)$，已有了较多较好的结果[3-7]。

注意：方程（2）是常时滞的，而方程（1）是变时滞的，因此方程（1）不同于方程（2），从而方程（2）的结果不适用于方程（1）。本文研究的目的是通过引入新的技巧，并分别就$0<c<1$和$c=1$两种情况，建立方程（1）非平凡解的振动性以及非振动解的渐近稳定性的充分条件。

1　主要结果

定理1　设$0<c<1$，假设$\sigma(t)\in C^1$，$\sigma'(t)>0$，以及存在一整数$n\ge 0$使得

收稿日期：2009-10-22
基金项目：湖南省教育厅基金资助重点项目（09A080）
作者简介：陈云新（1963-），男，湖南茶陵人，南华大学副教授，主要研究方向为泛函微分方程理论及应用，E-mail：cyx529@163.com

$$\int^{\infty}\left(p(s)\sigma(s)-\frac{1-c\alpha}{4(1-(c\alpha)^{n+1})}\cdot\frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)}\right)\mathrm{d}s=\infty, \tag{3}$$

那么方程（1）的非振动解趋向于0。

证明　不失一般性，设$x(t)$是方程（1）的最终正解，并定义：

$$z(t)=x(t)-cx(\alpha t), \tag{4}$$

由式（1）得，最终$z''(t)>0$。如果最终$z'(t)<0$，那么$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=-\infty$，但当$z(t)<0$最终成立时，则对充分大的$t$有：

$$x(t)<cx(\alpha t)<c^2x(\alpha^2 t)<\cdots<c^n x(\alpha^n t),$$

此式表明$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，从而$\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$。矛盾。因此最终$z'(t)>0$。

下面分两种情况考虑$z(t)$：

1）$z(t)>0, t\ge t_1\ge t_0$；

2）$z(t)<0, t\ge t_1\ge t_0$。

对于情形1)，方程（1）可写为

$$z''(t)+p(t)x(\sigma(t))=0,$$

由$\sigma(t)\in C^1$，$\sigma'(t)>0$，得

$$z''(t)+p(t)z(\sigma(t))+cp(t)x(\alpha\sigma(t))=0,$$

重复上述过程，得到：

$$z''(t)+p(t)\sum_{i=0}^{n}c^i z(\alpha^i\sigma(t))+c^{n+1}p(t)x(\alpha^{n+1}\sigma(t))=0, \tag{5}$$

记$a_n(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c^i z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)$，有

$$z''(t)+a_n(t)p(t)\le 0, \tag{6}$$

令$u(t)=\dfrac{\sigma(t)\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}{a_n(t)}z'(t), t\ge t_1$，　（7）

那么$u(t)>0$。计算可得：

$$u(t)=\frac{\sigma(t)\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}{a_n(t)}z(t)+\frac{\sigma(t)\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}{a_n(t)}z''(t)-\frac{\sigma(t)\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}{a_n(t)}z'(t)\frac{\sigma(t)\sum\limits_{i=0}^{n}(c\alpha)^i}{a_n(t)}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)。$$

由于$z'(t)$是单调递减的，因此

$$z'\left(\alpha^i\sigma(t)\right)\ge z'\left(\sigma(t)\right)\ge z'(t)。$$

根据式（6）和（7）得：

$$u'(t)\le\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\left[u(t)-\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}(c\alpha)^i}{\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}u^2(t)\right]-p(t)\sigma(t)\sum_{i=0}^{n}c^i, \tag{8}$$

定义函数$f(x)=x-\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}(c\alpha)^i}{\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}x^2,(x>0)$，易知：

$$f(x)\le\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}c^i}{4\sum\limits_{i=0}^{n}(c\alpha)^i}=\frac{(1-c\alpha)\left(1-c^{n+1}\right)}{4(1-c)\left(1-(c\alpha)^{n+1}\right)}, \tag{9}$$

由式（8）、（9）得

$$u'(t)\le\frac{1-c^{n+1}}{1-c}\left[\frac{1-c\alpha}{4\left(1-(c\alpha)^{n+1}\right)}\cdot\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}-p(t)\sigma(t)\right]。 \tag{10}$$

于是从t_1到t积分式（10）得：

$$u(t)\le u(t_1)+\frac{1-c^{n+1}}{1-c}\cdot\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1-c\alpha}{4\left(1-(c\alpha)^{n+1}\right)}\frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)}-p(s)\sigma(s)\right)\mathrm{d}s。$$

令$t\to\infty$，并根据式（3），可得$u(t)\to-\infty$。这就产生了矛盾。对于情形2)，如前所述，有$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。定理证毕。

推论1　设$0<c<1$以及$\sigma(t)\in C^1,\sigma'(t)>0$成立。

如果$\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{p(t)\sigma^2(t)}{\sigma'(t)}>\dfrac{1-c\alpha}{4}$，　（11）

那么式（1）的非振动解趋于0。

证明　令$a=\liminf\limits_{t\to\infty}\dfrac{p(t)\sigma^2(t)}{\sigma'(t)}$。选取一整数$n$使得：$a-\varepsilon>\dfrac{1-c\alpha}{4\left(1-(c\alpha)^{n+1}\right)}$，

这里ε充分的小，那么存在充分大的t_1使

$$\frac{p(t)\sigma^2(t)}{\sigma'(t)}-\frac{1-c\alpha}{4\left(1-(c\alpha)^{n+1}\right)}>\varepsilon,t\ge t_1。 \tag{12}$$

由式（12）可知式（3）成立，故由定理1，可知结论成立。证毕。

定理2　假设$\sigma(t)\in C^1,\sigma'(t)>0$成立，如果存在整数$k\ge 1$使得$s/\sigma(s)>(1/\alpha)^k$以及

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)\,\mathrm{d}s>\frac{(1-c)c^k}{1-c^k}, \tag{13}$$

那么方程（1）的非平凡解是振动的。

证明　根据定理1，只须证明$z(t)<0$最终不成立。假设$x(t)>0,z''(t)\le 0,z'(t)>0,z(t)<0$最终成立。将方程（1）写成

$$z''(t)-\frac{1}{c}p(t)z\left(\sigma(t)/\alpha\right)+\frac{p(t)}{c}x\left(\sigma(t)/\alpha\right)=0。$$

重复上述过程，可知对于充分大的 t 成立下式：

$$z''(t)-p(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c^i}z\left(\sigma(t)/\alpha^i\right)+\frac{p(t)}{c^k}x\left(\sigma(t)/\alpha^k\right)=0,$$

这样，利用$z(t)$的单调性可得：

$$z''(t)-z\left(\sigma(t)/\alpha^k\right)p(t)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c^i}\le 0。\qquad(14)$$

将式（14）从 s 到 t 积分得：

$$z'(t)-z'(s)-\frac{1-c^k}{(1-c)c^k}\int_s^t p(u)z\left(\sigma(u)/\alpha^k\right)\mathrm{d}u,\qquad(15)$$

再对式（15）关于 s 从$\sigma(t)/\alpha^k$ 到 t 积分，得到：

$$z'(t)\left(t-\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\le z(t)-z\left(\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)+\frac{1-c^k}{(1-c)c^k}\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)z\left(\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)\mathrm{d}s,$$

于是，由$z(t)$的单调性得：

$$z'(t)\left(t-\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\le z\left(\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\cdot\left\{\frac{1-c^k}{(1-c)c^k}\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)\mathrm{d}s-1\right\},$$

因此，如果式（13）成立，就产生了矛盾。定理证毕。

下面考虑 $c=1$ 的情况，有下面的结果。

定理3　设$c=1$以及$\sigma(t)\in C^1$, $\sigma'(t)>0$成立。如果存在整数 $n\ge 1$ 使得

$$\int^{\infty}\left(np(s)\sigma(s)-\frac{1-\alpha}{4\left(1-\alpha^{n+1}\right)}\cdot\frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)}\right)\mathrm{d}s=\infty\qquad(16)$$

成立，那么方程（1）的非振动解是有界的。

证明　设$x(t)$是方程（1）的最终正解，并令

$$z(t)=x(t)-x(\alpha t),$$

那么最终$z''(t)<0$。如果最终$z'(t)<0$，那么$\lim_{t\to\infty}z(t)=-\infty$。因此$x(t)\le x(\alpha t)$，$t$充分大。此表明$x(t)$是有界的，从而$\lim_{t\to\infty}z(t)=0$，这就产生了矛盾，因此，$z'(t)>0, t\ge t_1\ge t_0$。那么，或者$z(t)>0$，或者$z(t)<0, t\ge t_1\ge t_0$。可推测$z(t)>0$是不可能的。否则，将方程（1）重写成

$$z''(t)+p(t)\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)+p(t)x\left(\alpha^{n+1}\sigma(t)\right)=0,$$

于是$z''(t)+p(t)\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)\le 0$。（17）

令$u(t)=\dfrac{n\sigma(t)}{\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)}z'(t)$,（18）

那么 $u(t)>0$ 以及

$$u'(t)=\frac{n\sigma'(t)}{\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)}z'(t)+\frac{n\sigma(t)}{\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)}z''(t)-\frac{n\sigma(t)}{\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)}z'(t)\frac{\sigma'(t)\sum_{i=0}^{n}\alpha^i z'\left(\alpha^i\sigma(t)\right)}{\sum_{i=0}^{n}z\left(\alpha^i\sigma(t)\right)},$$

由于$z'\left(\alpha^i\sigma(t)\right)\ge z'\left(\sigma(t)\right)\ge z'(t)$，根据式（17）、（18），得到：

$$u'(t)\le\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\left(u(t)-\sum_{i=0}^{n}\alpha^i u^2(t)\right)-np(t)\sigma(t)\le\frac{1-\alpha}{4\left(1-\alpha^{n+1}\right)}\cdot\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}-np(t)\sigma(t),$$

将上面的不等式从 t_1 到 t 积分，得到：

$$u(t)\le u(t_1)+\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1-\alpha}{4\left(1-\alpha^{n+1}\right)}\cdot\frac{\sigma'(s)}{\sigma(s)}-np(s)\sigma(s)\right)\mathrm{d}s,$$

此表明$\lim_{t\to\infty}u(t)=-\infty$，这就产生了矛盾，因此$z(t)<0$, $t\ge t_1\ge t_0$，从而$x(t)<x(\alpha t)$，此表明$x(t)$是有界的。

推论2　设$c=1$。如果

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{p(t)\sigma^2(t)}{\sigma'(t)}>0,\qquad(19)$$

那么方程（1）的非振动解是有界的。

证明　记$a=\liminf_{t\to\infty}\dfrac{4\left(1-\alpha^{n+1}\right)p(t)\sigma^2(t)}{(1-\alpha)\sigma'(t)}$。选取整数 n 使得$a-\varepsilon>\dfrac{1}{n}$，这里 ε 充分小。那么存在充分大的 t_1 使得：

$$\frac{4\left(1-\alpha^{n+1}\right)p(t)\sigma^2(t)}{(1-\alpha)\sigma'(t)}-\frac{1}{n}>\varepsilon,\ t\ge t_1\qquad(20)$$

注意到式（20）成立意味着式（16）成立，推论得证。

定理4　假设定理3的条件成立，如果存在整数$k\ge 1$使得$s/\sigma(s)>(1/\alpha)^k$，以及

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{k},\qquad(21)$$

那么方程（1）的非平凡解是振动的。

证明　设$x(t)$是方程（1）的最终正解并记$z(t)=x(t)-x(\alpha t)$。注意到定理3的证明，我们只需证明$z(t)<0$ 不成立。假设

$$x(t)>0,\ z''(t)\le 0,\ z'(t)>0,\ z(t)<0,$$

最终成立，易得：

$$z''(t)-p(t)\sum_{i=1}^{k}z\left(\sigma(t)/\alpha^i\right)+p(t)x\left(\sigma(t)/\alpha^k\right)=0,$$

t 充分大。于是

$$z''(t)-kp(t)z\left(\sigma(t)/\alpha^k\right)\le 0。\qquad (22)$$

类似于定理 2 的证明，积分式（22）两次可得：

$$z'(t)\left(t-\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\le z(t)-z\left(\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)+$$
$$k\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)z\left(\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\mathrm{d}s,$$

由 $z(t)$ 的单调性可得：

$$z'(t)\left(t-\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\le z\left(\frac{\sigma(t)}{\alpha^k}\right)\cdot$$
$$\left\{k\int_{\sigma(t)/\alpha^k}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)\mathrm{d}s-1\right\},$$

因此，如果式（21）成立，就产生了矛盾。定理证毕。

2 举例

例 1 考虑中立型微分方程

$$\left(x(t)-cx\left(\frac{c}{2}t\right)\right)''+\frac{1}{t^2}x\left(\frac{t}{2}\right)=0,\ t\ge t_0>0,\qquad (23)$$

这里 $0<c<1$。

容易验证满足推论 1 的条件，因此方程（23）的非振动解趋向于 0。事实上，$x(t)=1/t$ 就是满足条件的 1 个解。

例 2 考虑中立型微分方程

$$\left(x(t)-cx(\mathrm{e}^{-\pi}t)\right)''+\frac{\sqrt{2}(1+c)}{t^2}x\left(\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{4}}t\right)=0,$$
$$c\in(0,1],\qquad (24)$$

这里 $\alpha=\mathrm{e}^{-\pi}$ 和 $\sigma(t)=\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{4}t}$。取 $k=1$，容易看出

$$s/\sigma(s)=\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}}>\mathrm{e}^{\pi}=1/\alpha,$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)/\alpha}^{t}\left(s-\frac{\sigma(s)}{\alpha^k}\right)p(s)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{3\pi}{4}\sqrt{2}(1+c)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}\right)>$$
$$\frac{9\pi\sqrt{2}}{16}(1+c)>(1+c)>1\ge c,$$

根据定理 2（或定理 4），方程（24）的所有非平凡解都振动。事实上，$x(t)=\sin(\ln t)$ 就是满足条件的 1 个解。

参考文献：

[1] Győri I, Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications[M]. Oxford：Claredon Press，1991.

[2] Erbe L H, Kong Q K, Zhang B G. Oscillation Theory of Functional Differential Equations[M]. New York：Dekker，1995.

[3] Zhang B G，Yu J S， Wang Z C. Oscillation of Higher Order Neutral Delay Differential Equations[J]. Rocky Mountain J. Math.，1995，25(1)：557-568.

[4] Das P，Mishra B B. Oscillation Phenomena in Neutral Delay Differential Equations[J]. Acta. Math. Hungar.， 1997，75(4)：323-335.

[5] Tang X H，Shen J H. Oscillation and Existence of Positive Solutions in a Class of Higher Order Neutral Delay Differential Equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, 213(2)：662-680.

[6] Li W N. Oscillation Properties of Even Order Neutral Differential Equations with Deviating Arguments[J]. Georgian Math. J.， 2000，7(2)：745-752.

[7] Erbe L H， Zhang B G. Oscillation of Second Order Neutral Delay Differential Equations[J]. Bull. Austral. Math. Soc.，1989，39(1)：71-80.

（责任编辑：罗立宇）

（上接第 10 页）

[6] 陈福来，文贤章. n阶线性脉冲微分方程的振动性[J]. 应用数学学报，2006，29(3)：527-541.
Chen Fulai，Wen Xianzhang. Oscillations of N-order Linear Differential Equation with Impulses[J]. Acta Mathematicae Sinica，2006，29(3)：527-577.

[7] 汤德全，陈永劭. 带强迫项的脉冲时滞微分方程的振动性[J]. 数学杂志，2005，25(5)：549-552.
Tang Dequan，Chen Yongshao. Oscillations of Impulses Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. Journal of Mathematics，2005，25(5)：549-552.

[8] 黄木根，冯伟贞. 带强迫项的二阶脉冲时滞微分方程的振动性[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2006，23(4)：452-456.
Huang Mugen，Feng Weizhen. Oscillation of Second-Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University，2006，23(4)：452-456.

[9] 叶国炳，周小奇. 带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(3)：22-25.
Ye Guobing，Zhou Xiaoqi. Oscillatory and Asymptotic Properties of Third Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(3)：22-25.

[10] LakshmikanthamV，Bainov D D. Theory of Impulsive Differential Equation[M]. Singapore：World Scientific，1989.

（责任编辑：张亦静）