一类脉冲时滞微分方程的振动性

王学斌

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：推出了一类脉冲时滞微分方程的非振动解与其一、二、三阶导数的符号关系，得到其振动性的判别准则，举例说明了准则的有效性。

关键词：脉冲时滞微分方程；振动性；判别准则

中图分类号：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)06-0007-04

Oscillations of A Class of Impulsive Delay Differential Equations

Wang Xuebin

(College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract: Deduces the sign relationship of the non-oscillatory solutions and their derivatives of first, second and third order，which belongs to a class of impulsive delay differential equations. Obtains some criterions about the oscillation of the solutions to the equations. Gives one example to illustrate the effectiveness of these cirterions.

Keywords: impulsive delay differential equation; oscillation; criterion

0　引言

脉冲微分系统作为一类混合动力系统有极为重要的现实意义，它得到了广泛的研究[1-10]。一些作者研究了脉冲微分方程的振动性与渐近性，有一些较好的结果。如文献[6]研究了 n 阶线性脉冲微分方程解的振动性；文献[3]研究了高阶非线性阻尼脉冲微分方程解的振动性；文献[4]研究了高阶非线性脉冲泛函微分方程的振动性；文献[7]研究了带强迫项的脉冲时滞微分方程的振动性，其中方程是一阶的；文献[8]研究了带强迫项的二阶脉冲时滞微分方程的振动性；文献[9]研究了带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性。受文献[6]的启发，本文对一类脉冲时滞微分方程进行研究，得到其振动性的判别准则，并举例说明准则的有效性。

本文考虑

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)+p(t)x(t)+q(t)x(t-\tau)=0 \\ \qquad\qquad (t>t_0,\ t\neq t_k,\ k\in N); \\ x(t_k^+)=a_{0k}x(t_k),\ x^{(i)}(t_k^+)=a_{ik}x^{(i)}(t_k^-) \\ \qquad\qquad (i=1,\ 2,\ 3); \\ x=\varphi(t) \qquad (t\in[t_0-\tau,\ t_0]) \end{cases} \tag{1}$$

解的振动性，其中：$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$；

$0<\tau\leqslant t_{k+1}-t_k<+\infty$；

$\lim\limits_{k\to+\infty} t_k=+\infty\ (k\in N)$；

$a_{ik}(i=0,1,2,3)$均为大于0的常数，且 $a_{0k}\neq 1(k\in N)$；$p(t),q(t)\in PC\{[t_0,+\infty),R^+\}$，它们在$(t_k,t_{k+1}](k\in N\cup\{0\})$上均不最终恒为0；

$\varphi\in C\{[t_0-\tau,t_0],R\}$，且$\varphi^{(4)}$在$[t_0-\tau,t_0]$上几乎处处(a.e.)存在，并且至多有可数个第一类间断点；

$$x^{(i)}(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\frac{x^{(i-1)}(t)-x^{(i-1)}(t_k^+)}{t-t_k},$$

收稿日期：2009-10-15

作者简介：王学斌（1968-），男，湖南长沙人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事微分方程方面的教学与研究，E-mail: 734611593@qq.com

$$x^{(i)}\left(t_k^-\right)=\lim_{t\to t_k^-}\frac{x^{(i-1)}(t)-x^{(i-1)}\left(t_k^-\right)}{t-t_k},\ i=1,\ 2,\ 3\ 。$$

定义 函数$x(t)$：$[t_0-\tau,+\infty)\to R$称为方程（1）的解，如果满足

①$x(t)=\varphi(t)$，$t\in[t_0-\tau,t_0]$；

②当$t\neq t_k$，$t\neq t_k+\tau(k\in N)$时，$x(t)$几乎处处满足$x^{(4)}(t)+p(t)x(t)+q(t)x(t-\tau)=0$，且

$x(t)\in C\{(t_k,t_k+1],R\}\ (k\in N\cup\{0\})$，

$x^{(4)}(t)$在$(t_k,t_k+1)\ (k\in N\cup\{0\})$内几乎处处存在，并至多有可数个第一类间断点；

③$x(t_k)\neq 0$，$x\left(t_k^+\right)=a_{0k}x\left(t_k\right)$，

$x^{(i)}\left(t_k^+\right)=a_{ik}x^{(i)}\left(t_k^-\right)$，$i=1，2，3$。

1 主要结论

引理 设$x(t)$为方程（1）的满足条件（H）$x(t)\in C^3\{(t_k,\ t_{k+1}),R\}(k\in N\cup\{0\})$的任意有界解，如果存在$T>t_0$，使得$t\geqslant T$时，$x(t)>0(<0)$，且有条件

$$(\mathrm{A}_i)\quad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{i\ s+1}a_{i\ s+2}\cdots a_{i\ s+m}}{a_{i-1\ s+1}a_{i-1\ s+2}\cdots a_{i-1\ s+m}}(t_{s+m+1}-t_{s+m})=+\infty\quad (s\in N,\ i=1,\ 2,\ 3);$$

$$(\mathrm{B})\quad \liminf_{m\to+\infty}a_{01}a_{02}\cdots a_{0m}>0,$$

则存在$T_0\geqslant T$。当$t_k\geqslant T_0$、$t\in(t_k,\ t_k+1)$时，有

$(-1)^j x^{(4-j)}(t_k^-)<0\ \ (>0)$，

$(-1)^j x^{(4-j)}(t)<0(>0)$，$j=1，2，3$。

证明 仅就括号外情形证明。

① 证明存在$T_1\geqslant T$，当$t_k\geqslant T_1$时，有$x'''(t_k^-)\geqslant 0$，否则存在$t_{s_1}\geqslant T_1, x'''(t_{s_1}^-)<0$，于是$x'''(t_{s_1}^+)=a_{3s_1}x'''(t_{s_1}^-)<0$。

设$x'''(t_{s_1}^+)=-\alpha_1(\alpha_1>0)$，由$p(t)$，$q(t)\geqslant 0$；

$x(t)$，$x(t-\tau)>0(t>T)$；

以及$x^{(4)}(t)=-p(t)x(t)-q(t)x(t-\tau)$(a.e.)，

就有$x^{(4)}(t)\leqslant 0\ \ (t\in(t_{s_1+l-1},t_{s_1+l}),\ l\in N)$(a.e.)，后续证明与文献[6]中引理1后续证明类似，此处略去。

定理1 设引理的条件（H），(A_i)（i=1，2，3）与（B）成立，且$0<a_{ik}\leqslant 1(i=1，2，3，k\in N)$，并且$a_{0k}>1$或$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$收敛，若还有$\int^{+\infty}t^3p(t)\mathrm{d}t=+\infty$或$\int^{+\infty}t^3q(t)\mathrm{d}t=+\infty$，则方程（1）的任意有界解是振动的。

证明 设方程（1）有一个非振动有界解$x(t)$，不妨设存在$T\geqslant t_0$，当$t>T$时，有$x(t-\tau)>0$，由引理知存在$T_0\geqslant T$，当$t_k\geqslant T_0$时，有$x'\left(t_k^-\right)>0,\ x'(t)>0\ \left(t\in\left(t_k,t_{k+1}\right)\right)$，记$s=\min\limits_{t_k\geqslant T_0}k$。

① 当$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$收敛时，$x(t)>x\left(t_s^+\right)=a_{0s}x\left(t_s\right)$，$t\in\left(t_s,\ t_{s+1}\right)$，得$x\left(t_{s+1}\right)>a_{0s}x\left(t_s\right)$；

$x(t)>x\left(t_{s+1}^+\right)=a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)>a_{0\ s+1}a_{0s}x\left(t_s\right),t\in\left(t_{s+1},\ t_{s+2}\right)$，

则$x\left(t_{s+2}\right)>a_{0\ s+1}a_{0s}x\left(t_s\right)$；…。

由归纳法可得，对$l\geqslant 1$有

$$\begin{cases}x(t)>a_{0\ s+l-1}\cdots a_{0\ s+1}a_{0\ s}x\left(t_s\right),t\in\left(t_{s+l-1},\ t_{s+l}\right),\\ x\left(t_{s+l}\right)>a_{0\ s+l-1}\cdots a_{0\ s+1}a_{0\ s}x\left(t_s\right),\end{cases}\qquad(2)$$

当$l\geqslant 2$，$t\in\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right)$时，由$t_{s+l-1}-t_{s+l-2}\geqslant\tau$得

$t_{s+l-2}\leqslant t_{s+l-1}-\tau<t-\tau<t<t_{s+l}$，

即$t-\tau\in\left(t_{s+l-2},t_{s+l-1}\right]\cup\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right)$。（3）

记$M_s^l=\min\left\{a_{0\ s}a_{0\ s+1}\cdots a_{0\ s+l-2},a_{0\ s}a_{0\ s+1}\cdots a_{0\ s+l-1}\right\}$，

$M_{sl}=\min\left\{M_s^2,M_s^3,\cdots,\ M_s^l\right\}$，再由式（2）得

$x(t-\tau)>M_s^l x\left(t_s\right)$，从而

$$x^{(4)}=-p(t)x(t)-q(t)x(t-\tau)\leqslant -q(t)x(t-\tau)\leqslant -M_s^l x\left(t_s\right)q(t),\ t\in\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right),\quad \text{(a.e.)}\quad(4)$$

对式（4）两边同乘以t^3，再从t_{s+1}到t_{s+l}积分得

$$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^3x^{(4)}(t)\mathrm{d}t\leqslant -M_{sl}x\left(t_s\right)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^3q(t)\mathrm{d}t\ 。\qquad(5)$$

而
$$\begin{aligned}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}t^3x^{(4)}(t)\mathrm{d}t&=\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}t^3\mathrm{d}x'''(t)=t^3x'''(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-3t^2x''(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}+6tx'(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-6x(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}=\\&\left[t_{s+m+1}^3x'''\left(t_{s+m+1}^-\right)-t_{s+m}^3x'''\left(t_{s+m}^+\right)\right]-3\left[t_{s+m+1}^2x''\left(t_{s+m+1}^-\right)-t_{s+m}^2x''\left(t_{s+m}^+\right)\right]+\\&6\left[t_{s+m+1}x'\left(t_{s+m+1}^-\right)-t_{s+m}x'\left(t_{s+m}^+\right)\right]-6\left[x\left(t_{s+m+1}\right)-x\left(t_{s+m}^+\right)\right]=\\&\left[t_{s+m+1}^3x'''\left(t_{s+m+1}^-\right)-a_{3\ s+m}t_{s+m}^3x'''\left(t_{s+m}^-\right)\right]-3\left[t_{s+m+1}^2x''\left(t_{s+m+1}^-\right)-a_{2\ s+m}t_{s+m}^2x''\left(t_{s+m}^-\right)\right]+\\&6\left[t_{s+m+1}x'\left(t_{s+m+1}^-\right)-a_{1\ s+m}t_{s+m}x'\left(t_{s+m}^-\right)\right]-6\left[x\left(t_{s+m+1}\right)-a_{0\ s+m}x\left(t_{s+m}\right)\right],\\&(m=1,2,\cdots,l-1)\end{aligned}$$

则
$$\begin{aligned}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^3x^{(4)}(t)\mathrm{d}t&=\sum_{m=1}^{l-1}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}t^3x^{(4)}(t)\mathrm{d}t=\left[t_{s+l}^3x'''\left(t_{s+l}^-\right)+\sum_{m=1}^{l-1}\left(1-a_{3\ s+m}\right)t_{s+m}^3x'''\left(t_{s+m}^-\right)-a_{3\ s+1}t_{s+1}^3x'''\left(t_{s+1}^-\right)\right]-\\&3\left[t_{s+l}^2x''\left(t_{s+l}^-\right)+\sum_{m=2}^{l-1}\left(1-a_{2\ s+m}\right)t_{s+m}^2x''\left(t_{s+m}^-\right)-a_{2\,s+1}t_{s+1}^2x''\left(t_{s+1}^-\right)\right]+6\left[t_{s+l}x'\left(t_{s+l}^-\right)+\sum_{m=2}^{l-1}\left(1-a_{1\ s+m}\right)t_{s+m}x'\left(t_{s+m}^-\right)-\right.\end{aligned}$$

$$a_{1s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+l}^{-}\right)\Big]-6\left[x\left(t_{s+l}\right)+\sum_{m=2}^{l-1}\left(1-a_{0\ s+m}\right)x\left(t_{s+m}\right)-a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]=$$

$$\left\{t_{s+l}^{3}x'''\left(t_{s+l}^{-}\right)+3t_{s+l}^{2}\left[-x''\left(t_{s+l}^{-}\right)\right]+6t_{s+l}x'\left(t_{s+l}^{-}\right)\right\}+\sum_{m=2}^{l-1}\left\{\left(1-a_{3\ s+m}\right)t_{s+m}^{3}x'''\left(t_{s+m}^{-}\right)+3\left(1-a_{2\ s+m}\right)t_{s+m}^{2}\left[-x''\left(t_{s+m}^{-}\right)\right]+\right.$$

$$\left.6\left(1-a_{1\ s+m}\right)t_{s+m}x'\left(t_{s+m}^{-}\right)\right\}-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]+$$

$$6\sum_{m=2}^{l-1}\left(a_{0\ s+m}-1\right)x\left(t_{s+m}\right),$$

$$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{3}x^{(4)}(t)\mathrm{d}t>-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]+6\sum_{m=2}^{l-1}\left(a_{0\ s+m}-1\right)x\left(t_{s+m}\right),\quad(6)$$

由式（5）、（6）可得 $-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]+$

$$6\sum_{m=2}^{l-1}\left(a_{0s+m}-1\right)x\left(t_{s+m}\right)<-M_{sl}x\left(t_{s}\right)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{3}q(t)\mathrm{d}t,\quad(7)$$

同理可得 $-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]+$

$$6\sum_{m=2}^{l-1}\left(a_{0\ s+m}-1\right)x\left(t_{s+m}\right)<-M_{sl}x\left(t_{s}\right)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{3}p(t)\mathrm{d}t。\quad(8)$$

②当 $a_{0k}>1$ 时，与①同理可得

$$-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]<-M_{sl}x\left(t_{s}\right)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{3}q(t)\mathrm{d}t,\quad(9)$$

$$-6x\left(t_{s+l}\right)-\left[a_{3\ s+1}t_{s+1}^{3}x'''\left(t_{s+1}^{-}\right)-3a_{2\ s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)+6a_{1\ s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)-6a_{0\ s+1}x\left(t_{s+l}\right)\right]<-M_{sl}x\left(t_{s}\right)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{3}p(t)\mathrm{d}t。\quad(10)$$

在式（7）或（8）中，由$\int^{+\infty}t^{3}q(t)\mathrm{d}t=+\infty$或$\int^{+\infty}t^{3}p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，且$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|x(t_{k})$收敛，条件（B）以及$x(t_s)>0$，得 $\lim\limits_{l\to+\infty}x\left(t_{s+l}\right)=+\infty$；在式（9）或（10）中，由$\int^{+\infty}t^{3}q(t)\mathrm{d}t=+\infty$或$\int^{+\infty}t^{3}p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，条件（B）以及$x(t_s)>0$，得$\lim\limits_{l\to+\infty}x\left(t_{s+l}\right)=+\infty$。这与$x(t)$是有界矛盾，则方程（1）的任意有界解是振动的。

定理2 设引理的条件（H），（A_i）（i=1,2,3）与（B）成立，记$e_{k}=\max\left\{1,\dfrac{1}{a_{0k}}\right\}(k\in N)$，若还有条件

$$(\mathrm{C}_1)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0s+m}}{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=+\infty$$

（$s\in N$），或

$$(\mathrm{C}_2)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0\ s+m}}{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}p(t)\mathrm{d}t=+\infty$$

（$s\in N$），

则方程（1）的任意有界解是振动的。

证明 设方程（1）有一个非振动有界解$x(t)$，不妨设存在$T>t_0$，当$t>T$时，有$x(t-\tau)>0$。

令$u(t)=\dfrac{x'''(t)}{x(t)}$，由引理知存在$T_0>T$，当$t_k\geqslant T_0$，$t\in(t_k,\ t_{k+1})$时，有$u(t_k^{-})>0$与$u(t)>0$，且

$$u\left(t_{k}^{+}\right)=\frac{x'''\left(t_{k}^{+}\right)}{x\left(t_{k}^{+}\right)}=\frac{a_{3k}x'''\left(t_{k}^{-}\right)}{a_{0k}x\left(t_{k}^{-}\right)}=\frac{a_{3k}}{a_{0k}}u\left(t_{k}^{-}\right)>0,\quad(11)$$

记$s=\min\limits_{t_k\geq T_0}k$，当$l\geqslant2$，$t\in(t_{s+l-1},\ t_{s+l})$时，由式（3）知$t-\tau\in\left(t_{s+l-2},t_{s+l-1}\right]\cup\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right)$。

从$x'(t)>0\left(t\in t_{s+l-2},t_{s+l-1}\right]\cup\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right))$，当$t-\tau\in\left(t_{s+l-2},t_{s+l-1}\right]$时，

$$x(t-\tau)\leqslant x\left(t_{s+l-1}\right)=\frac{1}{a_{0\ s+l-1}}x\left(t_{s+l-1}^{+}\right)\leqslant$$

$$e_{s+l-1}x\left(t_{s+l-1}^{+}\right)<e_{s+l-1}x(t),$$

当$t-\tau\in\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right]$时，$x(t-\tau)\leq x(t)\leq e_{s+l-1}x(t)$。

从而$x(t-\tau)<e_{s+l-1}x(t)\quad\left(t\in\left(t_{s+l-1},t_{s+l}\right]\right)$，则

$$u'(t)=\frac{x^{(4)}(t)x(t)-x'''(t)x'(t)}{x^{2}(t)}<\frac{x^{(4)}(t)}{x(t)}=$$

$$\frac{e_{s+l-1}x^{(4)}(t)}{e_{s+l-1}x(t)}<e_{s+l-1}\frac{x^{(4)}(t)}{x(t-\tau)}\leqslant-e_{s+l-1}q(t)\leqslant0,$$

即$u'(t)<-e_{s+m}q(t)\leqslant0$，($t\in(t_{s+m},\ t_{s+m+1})$，$m=1,2,\cdots,l-1$)，（a.e.），（12）

同理可得$u'(t)<-e_{s+m}p(t)\leqslant0$，($t\in(t_{s+m},\ t_{s+m+1})$，$m=1,2,\cdots,l-1$)，（a.e.），（13）

对式（12）从t_{s+m}到t_{s+m+1}积分得

$$u\left(t_{s+m+1}^{-}\right)\leqslant u\left(t_{s+m}^{+}\right)-e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{a_{3\ s+m}}{a_{0\ s+m}}u\left(t_{s+m}^{-}\right)-e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{a_{3\ s+m}}{a_{0\ s+m}}\left[u\left(t_{s+m}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+m}}{a_{3\ s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t\right]。\qquad(14)$$

从而由式（11），（14）得

$$u\left(t_{s+l}^{+}\right)=\frac{a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+l}}u\left(t_{s+l}^{-}\right)<\frac{a_{3\ s+l-1}a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+l-1}a_{0\ s+l}}\left[u\left(t_{s+l-1}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+l-1}}{a_{3\ s+l-1}}e_{s+l-1}\int_{t_{s+l-1}}^{t_{s+l}}q(t)\mathrm{d}t\right]<$$

$$\frac{a_{3\ s+l-1}a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+l-1}a_{0\ s+l}}\left\{\frac{a_{3\ s+l-2}}{a_{0\ s+l-2}}\left[u\left(t_{s+l-2}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+l-2}}{a_{3\ s+l-2}}e_{s+l-2}\int_{t_{s+l-2}}^{t_{s+l-1}}q(t)\mathrm{d}t-\frac{a_{0\ s+l-1}}{a_{3\ s+l-1}}e_{s+l-1}\int_{t_{s+l-1}}^{t_{s+l-1}}q(t)\mathrm{d}t\right]\right\}=$$

$$\frac{a_{3\ s+l-2}a_{3\ s+l-1}a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+l-2}a_{0\ s+l-1}a_{0\ s+l}}\left[u\left(t_{s+l-2}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+l-2}}{a_{3\ s+l-2}}e_{s+l-2}\int_{t_{s+l-2}}^{t_{s+l-1}}q(t)\mathrm{d}t-\frac{a_{0\ s+l-2}a_{0\ s+l-1}}{a_{3\ s+l-2}a_{3\ s+l-1}}e_{s+l-1}\int_{t_{s+l-1}}^{t_{s+l}}q(t)\mathrm{d}t\right],$$

……

$$u\left(t_{s+l}^{+}\right)<\frac{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0\ s+l}}\left[u\left(t_{s+1}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+1}}{a_{3\ s+1}}e_{s+1}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+2}}q(t)\mathrm{d}t-\cdots-\frac{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0\ s+l}}e_{s++l-1}\int_{t_{s+l-1}}^{t_{s+l}}q(t)\mathrm{d}t\right],$$

由（13）与（14），（15）同理可得

$$u\left(t_{s+l}^{+}\right)<\frac{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0\ s+l}}\left[u\left(t_{s+1}^{-}\right)-\frac{a_{0\ s+1}}{a_{3\ s+1}}e_{s+1}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+2}}p(t)\mathrm{d}t-\cdots-\frac{a_{3\ s+1}a_{3\ s+2}\cdots a_{3\ s+l}}{a_{0\ s+1}a_{0\ s+2}\cdots a_{0\ s+l}}e_{s++l-1}\int_{t_{s+l-1}}^{t_{s+l}}p(t)\mathrm{d}t\right]。\qquad(15)$$

在式（15）或（16）中，当l充分大时，由条件（C_1）或（C_2）知右边为负，而左边为正，矛盾，从而方程（1）的任意有界解是振动的。

2 应用举例

例 考虑方程

$$\begin{cases}x^{(4)}(t)+p(t)x(t)+q(t)x(t-\pi)=0\\ \qquad (t>t_0=\pi,\ t\neq 2k\pi,\ k\in N);\\ x\left(t_k^{+}\right)=a_{0k}x\left(t_k\right),\ x^{(i)}\left(t_k^{+}\right)=a_{ik}x^{(i)}\left(t_k^{-}\right)\\ \qquad (i=1,2,3);\\ x=\varphi(t)\qquad (t\in[0,\pi])。\end{cases}\qquad(17)$$

其中：$t_k=2k\pi$；

$$a_{ik}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{k}\right),(k\in N,\ i=0,1,2,3);$$

$$p(t)=1;$$

$$q(t)=\begin{cases}2 & (t\in(2n\pi-\pi,2n\pi)),\\ 2\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & (t\in(2n\pi,2n\pi+\pi)),\end{cases}n\in N。$$

显然方程（17）满足引理的条件（H）、（A_i）（i=1，2，3）与（B），且$0<a_{ik}\leqslant 1$（i=1, 2, 3, $k\in N$）。对于$\forall T>0$，不妨设$T\in(2n_0\pi,\ 2(n_0+1)\pi]$，$n_0\in N$，则

$$\int_T^{+\infty}t^3q(t)\mathrm{d}t\geq\int_T^{+\infty}q(t)\mathrm{d}t\geq\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(n_0+m)\pi}^{2(n_0+m+1)\pi}q(t)\mathrm{d}t\geq$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(n_0+m)\pi+\pi}^{2(n_0+m+1)\pi}2\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{+\infty}2\pi=+\infty。$$

即$\int_T^{+\infty}t^3q(t)\mathrm{d}t=+\infty$，并且$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|a_{0k}-1\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$收敛，从而定理1中的条件均满足，则方程（17）的任意有界解是振动的。实际上

$$x(t)=\begin{cases}1 & (t=0);\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\cos t\right) & (t\in(2n\pi,2n\pi+2\pi],\ n\in N\cup\{0\})\end{cases}\qquad(16)$$

为方程（17）的一个有界振动解，其中$\varphi(t)=\cos t$，$t\in[0,\pi]$。

参考文献：

[1] Luo J. Second Order Quasilinear Oscillation with Impulsives[J]. Compt. Math. Appl.，2003，46：279-291.

[2] Graef J R，Shen J H，Stavroulakis I P. Oscillation of Impulsive Neutral Delay Differential Equations[J]. J. Math. Anal. Appl.，2002，268：310-333.

[3] 潘立军. 高阶非线性阻尼脉冲微分方程解的振动性[J]. 高校应用数学学报A辑：中文版，2007，22A(1)：35-42.
Pan Lijun. Oscillations of Higher Order Nonlinear Impulsive Differential Equations with Damping[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities：Ser. A，2007，22A(1)：35-42.

[4] 张超龙，杨逢建，杨建富. 高阶非线性脉冲泛函微分方程的振动性[J]. 数学物理学报，2008，28A(1)：188-200.
Zhang Chaolong，Yang Fengjian，Yang Jianfu. Oscillation of Higher Order Nonlinear Functional Differential Equation with Impulses[J]. Acta Mathematica Scientia，2008，28A(1)：188-200.

[5] 申建华，庾建设. 具有脉冲扰动的非线性时滞微分方程[J]. 应用数学，1996，9(3)：272-277.
Shen Jianhua，Yu Jianshe. On Nonlinear Delay Differential Equations with Impulsive Perturbations[J]. Mathematica Applicata，1996，9(3)：272-277.

（下转第14页）