

基于 Logistic 映射的混沌优化若干理论问题分析

李祥飞, 邹莉华

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412008)

摘要: 讨论了由 Logistic 映射所产生的混沌序列的遍历性统计特征, 对混沌序列随机过程的自协方差和互协方差相关性进行定量地分析, 最后给出了混沌优化收敛性的证明, 这些特征决定了混沌优化具有全局性的优点, 为混沌搜索提供了理论指导。

关键词: Logistic 映射; 混沌优化; 混沌序列; 统计特征

中图分类号: TP18

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2009)03-0070-04

Analysis on Theoretical Issues of Chaos Optimization Based on Logistic Map

Li Xiangfei, Zou Lihua

(Department of Electrical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

Abstract: The ergodic statistics property of chaos sequence generated by logistic map is discussed. The relevance of auto-covariance and bi-cross-covariance in random process of chaos sequences is analyzed quantitatively. Finally the convergence of chaos optimization is proved. The properties determine the overall merits of chaos optimization and provide theoretical guidance for chaos searching.

Keywords: Logistic map; chaos optimization; chaos sequence; statistical property

混沌是存在于非线性系统中的一种较为普遍的现象, 混沌并不是一片混乱, 而是有着精制内在结构的一类现象。混沌运动具有遍历性、随机性、规律性等特点, 能在一定范围内按其自身的规律不重复地遍历所有状态。最重要的是, 混沌的遍历性特点可被用来进行优化搜索且能避免陷入局部极小, 因此, 混沌优化搜索方法已成为一种新颖的全局性优化技术。尽管混沌优化的研究仅仅在近几年得到发展, 但在许多学者的共同努力下, 取得了较多成果, 提出了多种基于混沌机制的优化方法, 不仅做了大量的数值仿真研究, 而且把混沌优化引入到工程应用中^[1-4], 有效地解决了工程实际问题。

目前, 在混沌优化的研究中, Logistic 映射因结构简单, 计算量小, 被大量地采用。但是, 大多数文献主要讨论混沌优化的实现问题, 很少从理论上研究混

沌优化的本质, 从而使得混沌优化存在一定的盲目性, 缺乏理论指导。事实上, 解决混沌优化的理论问题是重要且迫切的研究课题, 尤其从理论上定量地探讨混沌优化所具有的全局性、遍历性、规律性等特征, 这些特征决定了混沌优化具备全局性的优点, 这对混沌优化有重要的指导作用。本文主要从理论上探讨由 Logistic 映射所产生的混沌序列所具有的统计特征规律, 以及混沌优化的收敛性, 为混沌优化的全局遍历性搜索提供理论依据。

1 Logistic 映射的混沌特性

在非线性系统中, 常用 Lyapunov (李雅普诺夫) 指数判断系统是否具备混沌行为。Lyapunov 指数用来度量相空间中 2 条相邻轨道随时间按指数规律吸引或分离的程度, 正的 Lyapunov 指数意味着混沌。

收稿日期: 2009-03-26

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (05JJ40112), 湖南省教育厅青年基金资助项目 (06C29)

作者简介: 李祥飞 (1969-), 男, 湖南汨罗人, 湖南工业大学副教授, 博士后, 主要从事智能控制, 混沌优化, 交流传动方面的研究, E-mail: lixiangfei2002@sina.com

Logistic 映射的表达式为

$$x_{n+1} = S(x_n) = \mu x_n (1 - x_n), \quad (1)$$

式中: $0 < x_0 < 1, \mu \in [0, 4]$ 。

设轨道点为 x_n 时的误差为 dx_n , 则

$$x_{n+1} + dx_n = f(x_n + dx_n) \approx f(x_n) + dx_n \cdot f'(x_n),$$

有 $dx_{n+1} = dx_n \cdot f'(x_n) = dx_n \mu (1 - 2x_n)$ 。

当初始误差 dx_0 给定以后, x_n 的误差为

$$|dx_n| = |dx_0| \cdot \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| = |dx_0| \cdot \prod_{i=0}^{n-1} |\mu(1 - 2x_i)|, \quad (2)$$

如果不确定性的增长是按指数速度的, 则式(2)应与式(3)一致, $dx_n = dx_0 \cdot e^{\lambda n}$, (3)

则 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\mu(1 - 2x_i)|. \quad (4)$$

当参数 μ 的变化区间为 (3.4, 4.0) 时, Logistic 映射的 Lyapunov 指数如图 1 所示; 当参数 μ 的进入区间为 (3.57, 4.0) 时, 开始出现混沌行为, Lyapunov 指数为逐渐增大的正数, 并不时地被无限多具有周期行为的轨道所中断; 当 $\mu=4.0$ 时, $\lambda > 0$, Logistic 映射完全处于混沌状态。

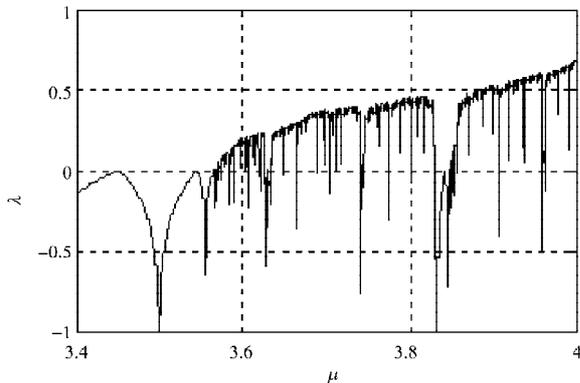


图 1 Logistic 映射的 Lyapunov 指数

Fig. 1 Lyapunov exponent of logistic map

为了产生混沌序列式(1), 常取 $\mu=4.0$, 得到式

$$x_{n+1} = S(x_n) = 4x_n(1 - x_n), \quad (0 < x_0 < 1), \quad (5)$$

x_n 完全处于混沌状态, 且在 $(0, 1)$ 范围内遍历。由于 Logistic 映射的吸引子是 $(0, 1)$, 而在利用混沌序列进行全局寻优的过程中, 常常要对混沌序列进行线性变换, 以实现与被优化参数的定义域相匹配。

定理 1 对于混沌动力学系统, 其 Lyapunov 指数与轨道或其等效的映射的表示形式无关, 即对于线性变换, Lyapunov 指数不会发生变化, 也就不会改变系统的混沌行为^[5]。

证明 从简单起见, 仅以离散系统为例给出证明。设存在一个非线性混沌系统

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in R^n, \quad (6)$$

Lyapunov 指数为 λ 。对混沌变量 x 作变换 $y = g(x)$, $y \in R^n$, 其中, y 是一个新的变量。假定变换因子 g 具有连续的一阶导数, 在映射定义了整个区间里, 对所有的 x , g 的逆映射存在且唯一。新变量的映射为

$$y_{n+1} = g(f(g^{-1}(y_n))) \quad (7)$$

为计算在新变量映射下的 Lyapunov 指数, 需要计算 dy_n/dy_1 , 因为 x 和 y 的关系是唯一的, 因此, 有

$$\frac{dy_n}{dy_1} = \frac{dy_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdot \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}} \cdots \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_1} =$$

$$g'(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) / g'(x_1)$$

因为 $g'(x_n)$ 和 $g'(x_1)$ 是有限的, 所以新映射的 Lyapunov 指数为

$$\lambda' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \right| + \ln |g'(x_n) / g'(x_1)| \right) \quad (8)$$

若 g 为线性变换, 有 $\ln |g'(x_n) / g'(x_1)| = 0$, 因此, 有

$$\lambda' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\left| \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \right| \right) = \lambda$$

因此, 混沌变量经过线性变换得到的变量仍保持了原来的混沌特性。

2 混沌序列的统计特征

Logistic 映射式(5)产生的混沌序列具有概率统计特性, 是确定论系统中一种内在的随机性行为, 因此, 可把混沌序列看作一个随机过程, 且具有遍历性。

对于式(5), 设任取区间 A 且 $A \subset (0, 1)$, 令 χ_A 为 A 的特征函数, 即 $x \in A$ 时, $\chi_A(x) = 1$; $x \notin A$ 时, $\chi_A(x) = 0$, 则轨道 $\{x_n\} = \{S^n(x_0)\}$ 落在 A 中的频率为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_A(S^n(x_0)) \quad (9)$$

设 ρ 是关于 Logistic 映射的时间不变的一个概率测度, 根据混沌遍历性的性质, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_A(S^n(x_0)) = \rho(A), \quad (10)$$

ρ 是关于时间的不变性, 意味着对任给 $(0, 1)$ 的可测子集 A , 有 $\rho(S^{-1}(A)) = \rho(A)$ 。

若 ρ 是关于 S 不变的, 并且是一个遍历的概率测度, 即式(10)成立且 $S^{-1}(A) = A$ 包含了 $\rho(A) = 0$ 或 $\rho(A) = 1$, 则式(11)关于测度 ρ 的 $x_0 \in (0, 1)$ 几乎处处成立^[6]。因此, 在式(5)中, 虽然从 x_0 出发的轨道 $\{S^n(x_0)\}$ 是混沌的, 并且对初始点 x_0 有极度敏感性, 但是此轨道落在 A 中的频率对所有初始点 x_0 (除 ρ 测度为 0 的集合点外) 均为同一常数, 此常数即为 A 的空间平均 $\rho(A)$ 。

Logistic 映射所产生的混沌序列的概率分布密度函

数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1), \end{cases}$ 得到 Logistic 映射的

吸引子任意区域的不变概率测度, 即 Birkhoff 逐点遍历定理^[7]。

设 $x_0 \in (0, 1)$, A 为任意区域且满足 $A \subset (0, 1)$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_A(S^n(x_0)) = \frac{1}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \rho(A),$$

在 Lebesgue 测度下几乎处处成立。因此, 在 Logistic 映射的吸引子 $(0, 1)$ 中取任意子集 A , 存在正整数 n , 使得 $S^n(x) \in A$, 且与初始值 x_0 无关, 体现了混沌系统的遍历性特征。

在利用 Logistic 映射混沌序列对多个参数进行全局优化时, 需要相对应数目的混沌序列。对于同一混沌序列中的不同混沌数, 如果它们的自协方差函数绝对值较大, 表明同一混沌序列中的不同混沌数线性联系较密切, 不利于混沌的全局性寻优; 如果它们的自协方差函数绝对值较小, 表明混沌序列中的不同混沌数线性联系很不密切, 这样混沌序列曲线的变化起伏很大又很不规则, 使得混沌序列尽可能遍历一维空间的各个区间, 有利于混沌的全局性寻优; 同理, 对于多个混沌序列, 如果它们的互协方差函数值较大, 表明不同混沌序列间的线性联系较密切, 也不利于采用混沌机制实现多变量全局性寻优; 如果它们的互协方差函数值较小, 表明不同混沌序列间的线性联系不密切, 这将使得多个混沌序列尽可能遍历多维空间的各个区域, 有利于实现多变量的多维空间全局性寻优。

定理 2 (Boltzman 遍历性定理) 如果系统具有遍历性, 则其任何一个可观测量对相应统计系统的平均等价于该可观测量在任一个系统演化过程中的无穷长

时间平均^[8], 即 $\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$,

式中: $\langle x \rangle$ 为可观测量对统计系统的平均;

x 为系统中的任意演化函数。

由于混沌序列具有遍历性, 而遍历过程必然是平稳随机过程, 混沌序列的概率分布满足平稳性, 随机过程的统计特征不随时间推移而变。根据 Boltzman 遍历性定理可知其样本函数的空间集合平均等于某一个样本函数的时间平均, 因此, 可利用一个样本函数近似计算数学期望和相关函数的概率统计问题, 有

$$Ex_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i, R(x_i, x_{i+m}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot x_{i+m}。$$

先讨论 Logistic 映射产生的混沌序列 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 自协方差函数。

设 $S(x) = 4x(1-x)$, $S^{(m)}(x) = \underbrace{S(S(\dots S(x)))}_m$, 假定任

意 2 个不同的迭代步数为 $n, (n+m) \in (1, 2, \dots, N)$, x_n, x_{n+m} 是 2 个混沌数, 它们之间线性联系的密切程度自协方差函数为

$$C_x(n, n+m) = \text{cov}(x_n, x_{n+m}) =$$

$$E(x_n - m_{x_n}) \cdot (x_{n+m} - m_{x_{n+m}}) = E(x_n, x_{n+m}) - Ex_n \cdot Ex_{n+m},$$

式中: m_{x_n} 为混沌变量 x_n 的均值;

$m_{x_{n+m}}$ 为混沌变量 x_{n+m} 的均值。

一个混沌序列 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的均值为

$$Ex_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i = \int_0^1 x \rho(x) dx = \int_0^1 x \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx = 0.5,$$

由于混沌序列 x_i 的均值为常数, 与 i 无关, 因此有

$$Ex_i = Ex_n = Ex_{n+m},$$

$$C_x(n, n+m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot x_{n+m} - (Ex_i)^2 =$$

$$\int_0^1 x \cdot S^{(m)}(x) \rho(x) dx - (Ex_i)^2 = 0,$$

故混沌序列中的所有混沌数之间没有任何线性联系。

设在 $(0, 1)$ 区间任取 2 个不同的初始值分别代入 Logistic 映射, 即能得到 2 个不同混沌序列 x_{1i}, x_{2i} , ($i=1, 2, \dots, N$), x_{1n}, x_{2n+m} 分别为二者的任意 2 个混沌数, 则反映混沌序列 x_{1i}, x_{2i} 之间线性联系密切程度的互协方差函数为

$$C_{x_1 x_2}(n, n+m) = E(x_{1n} - m_{x_{1n}}) \cdot (x_{2n+m} - m_{x_{2n+m}}) =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{1n} \cdot x_{2n+m} - (Ex)^2 =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x_1 S^{(m)}(x_1) \rho(x_1) \rho(x_2) dx_1 dx_2 - (Ex)^2 = 0,$$

因此, 由 Logistic 映射产生的不同混沌序列之间也没有任何线性联系^[8]。

综上所述, 由 Logistic 映射产生的同一混沌序列中不同混沌数之间, 及混沌序列之间都没有线性联系, 这是混沌序列形成的混沌随机变量所具有的独特概率统计特征, 这为混沌全局性优化搜索提供了理论依据。

3 混沌优化的收敛性分析

非线性系统的参数优化问题一般可描述为:

$\min J(\mathbf{X}) \rightarrow R$, 其中 $J(\mathbf{X})$ 为性能指标函数, $\mathbf{X} \in s$ 且

$s = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ 为多维搜索空间, 假定 $J(\mathbf{X})$ 满足:

① $J(\mathbf{X})$ 在向量 \mathbf{X} 上的全局最小值 $\min J(\mathbf{X})$ 存在, 则全局参数最优的集合

$$I = \arg \min_{\mathbf{W}} J(\mathbf{X}) = \{\mathbf{X} \in s | J(\mathbf{X}) = \min J(\mathbf{X})\} \text{非空};$$

② $J(\mathbf{X})$ 是定义在向量 \mathbf{X} 上的变量, 且满足

$$0 < \min J(\mathbf{X}) \leq J(\mathbf{X}) \leq \max J(\mathbf{X}) < \infty;$$

③ 混沌搜索参数向量 $\mathbf{X}_n (n=1, 2, \dots)$ 没有次数的限制。

定义 设性能指标 $J(\mathbf{X}^*) = \min J(\mathbf{X})$,

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ 为 m ($m = p$) 维的参数变量, 当且仅当满足: $\lim_{n \rightarrow \infty} p\{J(\mathbf{X}) - J(\mathbf{X}^*) < \varepsilon\} = 1$, (依概率成立, 其中 n 为混沌优化的次数), 则混沌优化算法是全局收敛的。

设 X_ε 为满足如下条件的子集

$$X_\varepsilon = \{\mathbf{X} \mid |J(\mathbf{X}) - J(\mathbf{X}^*)| < \varepsilon, \mathbf{X} \in R^m\}.$$

定理 3 采用混沌优化算法, $J(\mathbf{X})$ 是以概率收敛到全局最优值 $J(\mathbf{X}^*)$ 。

证明 对于任意给定的 ε , 存在 $\delta > 0$ 满足:

$$\text{if } \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\| < \delta, \text{ then } |J(\mathbf{X}) - J(\mathbf{X}^*)| < \varepsilon.$$

令 $A_n = \{\mathbf{X} \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^*\| < \delta, \mathbf{X} \in R^m\}$, 显然有: $A_n \subset X_\varepsilon$ 。

据混沌遍历性性质, 对任意状态 \mathbf{X}_n , 都有 $\rho(\mathbf{X}_n) > 0$, 而且混沌优化算法保留下来的误差函数 $J(\mathbf{X}_n)$ 单调递减, 有 $J(\mathbf{X}_1) > J(\mathbf{X}_2) > \dots > J(\mathbf{X}_n) > \dots > J(\mathbf{X}^*)$ 。一旦搜索的权向量 \mathbf{X}_n 进入区域 X_ε , 以后各次搜索的当前最优结果都不会跳出区域 X_ε , 这就意味着 X_ε 是一个收缩域^[9], 因此 $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ 。

设向量 \mathbf{X} 进入区域 A_n 的概率为 $\rho(A_n)$, 则 $\rho(A_n)$ 单调递增, 且对所有 n , 有 $\rho(A_n) \leq 1$, 而单调递增有上界的数列必有极限, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n)$ 存在, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n) = \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1, \text{ 即 } J(\mathbf{X}_n) \text{ 以概率收敛到全局最小值 } J(\mathbf{X}^*).$$

4 结语

在基于混沌序列的多变量参数优化算法中, Logistic 映射是应用最为广泛的混沌系统。本文讨论了由 Logistic 映射所产生的混沌序列所具有的独特遍历性概率统计特征, 对混沌序列随机过程的自协方差和互协方差相关性进行了定量地分析, 最后给出了混沌优化收敛性的证明, 为混沌优化搜索具有全局最优性提供了理论基础。

参考文献:

[1] 高 洁. 计算机通信网最优流量分配的新算法—混沌模拟退火优化方法[J]. 通信学报, 2001, 22(11): 64-71.

Gao Jie. A New Algorithm for Computing the Flow Assignment of Computer Communication Networks—Chaos Simulated Annealing Algorithm[J]. Journal of China Institute of Communications, 2001, 22(11): 64-71.

- [2] 秦 斌, 吴 敏, 王 欣. 模糊神经网络模型混沌混合优化学习算法及应用[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 261-265.
- Qin Bin, Wu Min, Wang Xin. Hybrid Chaos Optimization Algorithm for Fuzzy Neural Network Model and Its Applications[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 261-265.
- [3] 王爽心, 韩 芳, 朱衡君. 基于改进变尺度混沌优化方法的经济负荷分配[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(24): 90-95.
- Wang Shuangxin, Han Fang, Zhu Hengjun. Economic Load Spatch Based on Improved Mutative Scale Chaotic Optimization[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(24): 90-95.
- [4] 鄂加强, 王耀南, 梅 焱, 等. 铜精炼过程液化气消耗泛涵混沌优化器的设计[J]. 中国有色金属学报, 2006, 16(2): 370-376.
- E Jiaqiang, Wang Yaonan, Mei Chi, et al. Design on Functional Chaos Optimizer about Consumption of Liquefied Petroleum Gas in Copper Refining Process[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2006, 16(2): 370-376.
- [5] 王耀南. 计算智能信息处理技术及其应用[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 1999.
- Wang Yaonan. Computational Intelligent Information Processing Technology and Its Application[M]. Hunan University Press.
- [6] 丁 玖, 周爱辉. 不变测度及其计算[J]. 数学进展, 1998, 27(4): 309-323.
- Ding Jiu, Zhou Aihui. Invariant Measures and Their Computation[J]. Advances in Mathematics, 1998, 27(4): 309-323.
- [7] Walters P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York: Springer-Veringer, 1982.
- [8] 汪荣鑫. 随机过程[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992.
- Wang Rongxin. Random Process[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1992.
- [9] 钱富才, 费楚红, 万百五. 利用混沌搜索全局最优的一种混合算法[J]. 信息与控制, 1998, 27(3): 232-235.
- Qian Fucai, Fei Chuhong, Wan Baiwu. A Hybrid Alogorithm for Finding Global Minimwm[J]. Information and Control, 1998, 27(3): 232-235.

(责任编辑: 张亦静)