第23卷第3期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.23 No.3
2009年5月 Journal of Hunan University of Technology May 2009

基于直接矢量分析的通用瞬时功率理论

周万传，肖强晖，廖无限

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：提出了一种直接依据矢量运算的通用瞬时功率理论，首先以三相系统为例给出了三相系统中各瞬时值的通用定义，然后详细分析和证明了各定义量的相互关系和性质，并将这种定义和性质推广至任意相电路。最后，阐明了通用瞬时功率理论的物理意义。

关键词：瞬时功率；无功定义；三相电路

中图分类号：TM301.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2009)03-0063-03

Universal Instantaneous Power Theory Based on Direct Vector Analysis

Zhou Wanchuan，Xiao Qianghui，Liao Wuxian

（College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：A new kind of universal instantaneous power theory is presented , which is directly based on vector operation. Firstly, the three-phase system is set as an example to give universal definition of instantaneous values. Then, the relationship and the nature of the definitions are analyzed and proved in detail. Moreover, the definition and the nature are extended to any-phase circuit. Finally, the physical meaning of the universal instantaneous power theory is clearly clarified.

Keywords：instantaneous power；reactive power definition；three-phase circuit

电力电子技术的发展和应用，使得电网中出现大量非线性负荷，而非线性负荷即使不带储能元件仍需要无功，且含大量谐波成份[1]。为适应这一发展，作为现代电力电子技术发展基础的瞬时功率理论，需在传统基于周期平均值的基础上进一步拓展。

1984年，H. Akagi从补偿的角度出发，在三相电路中引入瞬时无功的概念，据此，在一定条件下通过Park变换和反变换可算出需补偿的电流，通过补偿减少能量传输损耗[2]。但该定义仅适合三相三线制对称电路，且与传统功率理论的关系没得到透彻的分析。之后，Takahashi、Furuhashi、Willems[3]、刘进军[4]等人分别给出不同的瞬时功率定义方法，但这些定义均没有很好地解决零序电压分量问题，且不具备通用性。1998年，戴先中等人[5]引入二阶反对称张量概念来表述瞬时无功量，该定义物理意义明确，有一定的普遍适应性，但瞬时无功的表达式不够直观、简洁与通俗。

本文提出一种基于矢量的内积与外积运算通用的瞬时功率理论，直接依据系统的瞬时电压与瞬时电流矢量来定义瞬时有功和瞬时无功，并给出各瞬时值直观而简洁的通用表达式。该定义不但适用于各种三相电路及任意相制电路，而且适应各种坐标系[6]。同时，明确了瞬时无功功率的物理意义，且传统功率理论的“功率三角形”性质得到保持，从而包含了传统功率理论的所有定义。下面以（α,β，0）坐标系为例，对三相系统进行阐述，然后推广至任意相制系统。

1　三相系统瞬时值的通用定义

如图1所示的三相四线制电路，将各相电路的瞬时值分别看作对应矢量的一个分量，如果采用（α,β，

收稿日期：2009-03-02

作者简介：周万传（1985-），男，湖南望城人，湖南工业大学硕士研究生，主要从事现代电力电子技术及系统方面的研究，E-mail：chuan510221@163.com

0）坐标系，则定义如下。

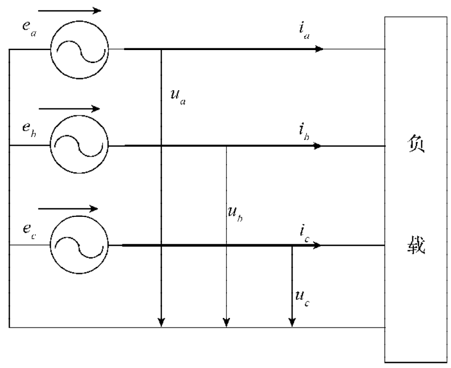

图 1　三相四线制电路示意图

Fig. 1　The 3-phase 4-wire circuit schematic diagram

1）将三相系统瞬时电压空间矢量 $\boldsymbol{u}$、瞬时电流空间矢量 $\boldsymbol{i}$ 写成列矢量形式：

$$\boldsymbol{u}=\left[u_\alpha,u_\beta,u_0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{i}=\left[i_\alpha,i_\beta,i_0\right]^{\mathrm{T}};$$

2）定义瞬时有功 p 为电压矢量与电流矢量的内积（或称标量积），内积用符号“·”表示，即

$$p=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}=u_\alpha i_\alpha+u_\beta i_\beta+u_0 i_0\ ;$$

3）定义瞬时无功矢量 $\boldsymbol{q}$ 为电压矢量与电流矢量的外积（或称矢量积），外积用符号“×”表示，即：

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}=\left(u_\beta i_0-u_0 i_\beta\right)\boldsymbol{e}_\alpha+\left(u_0 i_\alpha-u_\alpha i_0\right)\boldsymbol{e}_\beta+\left(u_\alpha i_\beta-u_\beta i_\alpha\right)\boldsymbol{e}_0,$$

式中：$\boldsymbol{e}_\alpha,\boldsymbol{e}_\beta,\boldsymbol{e}_0$为$\alpha$、$\beta$及 0 轴的单位基矢。

瞬时无功 q 的大小为：

$$|q|=\|\boldsymbol{q}\|=\sqrt{\left(u_\beta i_0-u_0 i_\beta\right)^2+\left(u_0 i_\alpha-u_\alpha i_0\right)^2+\left(u_\alpha i_\beta-u_\beta i_\alpha\right)^2},$$

瞬时无功 q 的符号就是瞬时无功矢量 $\boldsymbol{q}$ 与 0 轴单位基矢 $\boldsymbol{e}_0$ 之间内积的符号，即

$$sign(q)=sign\left(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{e}_0\right)=sign\left(i_q\right),\quad q=sign(q)|q|。$$

注　n 维矢量的外积运算方法为：

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}=\sum_{\substack{m=1\\m\neq j}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\m\neq k}}^{n}\varepsilon_{mjk}u_j i_k\boldsymbol{e}_m,$$

其中：$\boldsymbol{e}_m$ 为对应的单位基矢；u_j，i_k 为各矢量的对应元素；$\varepsilon_{mjk}=\begin{cases}+1，mjk\text{经偶数次置换为正序排列时}；\\-1，mjk\text{经奇数次置换为正序排列时}。\end{cases}$

各项式子的 ε_{mjk} 符号确定方法为：每一项式子的起始排列顺序为 $\boldsymbol{e}_m, u_j, i_k$，将其下标组成的序列 mjk 逐步置换成正序排列（即从小到大排列），每次置换相邻的 2 个下标，置换的次数为偶数次，则该项符号为正；置换的次数为奇数次，则该项符号为负。

下面以三维矢量为例详细说明外积运算方法。

$$\boldsymbol{u}=\left[u_1,u_2,u_3\right]^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{i}=\left[i_1,i_2,i_3\right]^{\mathrm{T}},$$

则$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}=\left[u_2 i_3-u_3 i_2\right]\boldsymbol{e}_1+\left[u_3 i_1-u_1 i_3\right]\boldsymbol{e}_2+\left[u_1 i_2-u_2 i_1\right]\boldsymbol{e}_3$。

其中各符号确定方法为：$\boldsymbol{e}_2 u_3 i_1\Rightarrow 231\xrightarrow{1}213\xrightarrow{2}123$，置换 2 次，为偶数次，符号为正。$\boldsymbol{e}_2 u_1 i_3\Rightarrow 213\xrightarrow{1}123$，置换 1 次，为奇数次，符号为负。

4）定义瞬时有功电流矢量 $\boldsymbol{i}_p$ 和瞬时无功电流矢量 $\boldsymbol{i}_q$ 分别为：$\boldsymbol{i}_p=\left[i_{\alpha p},i_{\beta p},i_{0p}\right]^{\mathrm{T}}=\dfrac{p}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=\dfrac{p\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}$，

$$\boldsymbol{i}_q=\left[i_{\alpha q},i_{\beta q},i_{0q}\right]^{\mathrm{T}}=\frac{\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}=\frac{\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}。$$

若约定电压 / 电流的正方向全部采用发电机惯例，则有：$i_p=\left\|\boldsymbol{i}_p\right\|sign\left(i_p\right)\cdot sign\left(i_p\right)=\begin{cases}+1，\ \boldsymbol{i}_p\text{与}\boldsymbol{u}\text{同向}；\\\ \ 1，\ \boldsymbol{i}_p\text{与}\boldsymbol{u}\text{反向}。\end{cases}$

$$i_q=\left\|\boldsymbol{i}_q\right\|sign\left(i_q\right),sign\left(i_q\right)=$$

$$\begin{cases}+1\quad \boldsymbol{i}_q\text{超前}\boldsymbol{u}\,90^\circ，\text{则发出无功，容性负载}；\\-1\quad \boldsymbol{i}_q\text{滞后}\boldsymbol{u}\,90^\circ，\text{则吸收无功，感性负载}。\end{cases}$$

5）定义瞬时视在功率 s 及瞬时功率因数λ为：

$$s=\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{i}\|=\sqrt{u_\alpha^2+u_\beta^2+u_0^2}\sqrt{i_\alpha^2+i_\beta^2+i_0^2},\ \lambda=\frac{p}{s}。$$

2　定义量的性质

1）三相电流空间矢量 $\boldsymbol{i}$ 总可分解成瞬时有功电流矢量 $\boldsymbol{i}_p$ 和瞬时无功电流矢量 $\boldsymbol{i}_q$，即总有 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_p+\boldsymbol{i}_q$。　（1）

证明$\boldsymbol{i}_q=\dfrac{\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}=\dfrac{(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}=\dfrac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{i}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}_p$，得证。

2）$\boldsymbol{i}_p\perp\boldsymbol{i}_q$，即有$\boldsymbol{i}_p\cdot\boldsymbol{i}_q=0$。　（2）

证明　$\boldsymbol{i}_p\cdot\boldsymbol{i}_q=\boldsymbol{i}_p\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}_p)=\boldsymbol{i}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_p=$

$$\frac{p}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}-\frac{p}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\frac{p}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\boldsymbol{u}=\frac{p^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}-\frac{p^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}=0,\text{得证。}$$

3）$\boldsymbol{i}_p$ // $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{i}_q$，即有 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}_q=0$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}_p=0$。　（3）

证明　$\boldsymbol{i}_p=\dfrac{p\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}\Rightarrow\boldsymbol{u}=\dfrac{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}{p}\vec{i}_p\Rightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}_q=\dfrac{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}{p}\boldsymbol{i}_p\cdot\boldsymbol{i}_q=$

$0\Rightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{i}_q,\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}{p}\boldsymbol{i}_p\Rightarrow\boldsymbol{i}_p /\!/ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}_p=\boldsymbol{0}$，得证。

4）由式（2）、（3）可得，瞬时无功只与瞬时无功电流有关，而与瞬时有功电流无关；瞬时有功则只与瞬时有功电流有关，与瞬时无功电流无关，即有：

$p=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}_p$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}_q$。　（4）

证明　$p=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{i}_p+\boldsymbol{i}_q)=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}_p$，

$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{i}_p+\boldsymbol{i}_q)=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}_q$，得证。

5）当 $\boldsymbol{i}_q$=0 时，传送同样的有功功率所需的电流 i（$\boldsymbol{i}$ 的模）最小，这时λ = 1，功率因数达到最大。

6）若约定电压 / 电流正方向全部采用发电机惯例，则有：瞬时有功功率总是守恒的，即$\sum_k p_k=0$；　（5）

瞬时无功功率矢量始终是守恒的，即$\sum_k \boldsymbol{q}_k=0$；　（6）

3相3线制系统中，瞬时无功守恒，即$\sum_k q_k = 0$；（7）

3相4线制系统中，瞬时无功不守恒，即$\sum_k q_k \neq 0$；（8）

7）传统功率理论的"功率三角形"性质自然得到保持，即有$\|\boldsymbol{i}\|_2^2 = \|\boldsymbol{i}_p\|_2^2 + \|\boldsymbol{i}_q\|_2^2$，$s^2=p^2+q^2$。（9）

证明 a) $\|\boldsymbol{i}\|_2^2 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i}_p+\boldsymbol{i}_q)\cdot(\boldsymbol{i}_p+\boldsymbol{i}_q) =$

$$\boldsymbol{i}_p\cdot\boldsymbol{i}_p + \boldsymbol{i}_q\cdot\boldsymbol{i}_q = \|\boldsymbol{i}_p\|_2^2 + \|\boldsymbol{i}_q\|_2^2;$$

b) $s^2 = (u_\alpha^2+u_\beta^2+u_0^2)(i_\alpha^2+i_\beta^2+i_0^2)$，

$p^2 = (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_0 i_0)^2$，

$q^2 = (u_\beta i_0 - u_0 i_\beta)^2 + (u_0 i_\alpha - u_\alpha i_0)^2 + (u_\alpha i_\beta - u_\beta i_\alpha)^2$。

易得$s^2=p^2+q^2$，得证。

3　定义量的推广

以上定义和性质不带任何约束条件，完全根据矢量分析中的概念和运算方法，因此这些定义可直接推而至n相电路情况，即有：

电压空间矢量为$\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}}$；

电流空间矢量为$\boldsymbol{i} = [i_1, i_2, i_3 \cdots, i_n]^{\mathrm{T}}$；

瞬时n相有功功率为$p = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}$；

瞬时n相无功矢量为$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i}$；

瞬时n相无功大小为$|q| = \|\boldsymbol{q}\|$；

瞬时n相有功电流矢量$\boldsymbol{i}_p$为$\boldsymbol{i}_p = \dfrac{p\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}$；

瞬时n相无功电流矢量$\boldsymbol{i}_q$为$\boldsymbol{i}_q = \dfrac{\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}$；

瞬时视在功率s为$s = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{i}\|$；

瞬时功率因数λ为$\lambda = \dfrac{p}{s}$。

由论述易知，上述通用定义依然满足式（1）~（9）中所示的各条性质。

4　瞬时功率的物理意义

传统的功率概念是以正弦电源和线性负载为背景的。有功功率是指一个工频周期内的平均功率，物理意义是电路实际消耗的功率，无功功率代表负荷和电源之间能量交换的一种量度，是储能元件（电容、电感）吞吐能量能力的反映。有功功率、无功功率及视在功率的关系可以形象地表示为"功率三角形"。

根据本文的通用定义，瞬时无功功率q不再是个虚拟量，而是有其明确的物理意义：是指在多相之间流动、传送的功率，多相无功的瞬时值之和为零；瞬时有功电流$\boldsymbol{i}_p$是传输瞬时有功所必须的，而不对瞬时无功做贡献，同样，瞬时无功电流$\boldsymbol{i}_q$不会从电源到负荷传送瞬时有功，但是其存在会增大多相电流的幅值，从而增加电路的损耗。

5　结论

通过以上讨论，可得出如下结论：

1）本文定义的各瞬时量适用任意相制电路，无须任何坐标变换即可适用于各种坐标系，具通用性；

2）本文的通用定义既有传统功率理论的性质，又适用于不对称、非正弦的任意相制系统，为现代电力电子系统的瞬时控制提供了理论基础；

3）本文的通用定义简单、直观而通俗，与传统定义相比，其物理意义更加明确，因而具有更加广泛的适用性。

参考文献：

[1] 侯世英，潘　翀，吕厚余，等. 三相四线制系统瞬时功率理论的比较研究[J]. 高电压技术，2007，33(5)：114-117.
Hou Shiying，Pan Chong，Lv Houyu，et al. Comparative Study of Three-Phase Four-Wire System Instantaneous Power Theory[J]. High Voltage Engineering，2007，33(5)：114-117.

[2] Akagi H，Kanazawa Y，Nabae A. Instantaneous Reactive Power Components Comp Rising Switching Devices without Energy Storage Components[J]. IEEE Trans. on IA，1984，20(30)：625-631.

[3] Willems J L. A New Interpretation of the Akagi-Nabae Power Components for Nonsinusoidal Three-Phase Situation[J]. IEEE Trans. on M.，1992，41(4)：523-527.

[4] 刘进军，王兆安. 基于旋转空间矢量分析瞬时无功功率理论及其应用[J]. 电工技术学报，1999，14(1)：49-54.
Liu Jinjun，Wang Zhaoan. Analysis of Theory and Applications of Instantaneous Reactive Power Based on Space Vector Method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society，1999，14(1)：49-54.

[5] 戴先中，唐统一，孙树勤. 非正弦三相电路中瞬时无功量的普遍化定义[J]. 中国电机工程学报，1998，18(6)：388-394.
Dai Xianzhong，Tang Tongyi，Sun Shuqin. A Generalized Definition of Instantaneous Reactive Quantity in Non-sinusoidal Three Phase Systems[J]. Proceedings of the CSEE，1998，18(6)：388-394.

[6] 唐　蕾，陈维荣. 瞬时无功功率理论坐标变换的推导及谐波电流检测原理分析[J]. 电网技术，2008，32(5)：66-69.
Tang Lei, Chen Weirong. Deduction of Coordinate Transform for Instantaneous Reactive Power Theory and Analysis on the Principle of Harmonic Current Detection Method[J]. Power System Technology，2008，32(5)：66-69.

（责任编辑：廖友媛）