非线性积分微分方程Runge-Kutta方法的收缩性

陈志钢

（株洲职业技术学院，湖南 株洲 412000）

摘　要：将Runge-Kutta方法用于求解$D(\alpha,\beta,\gamma)$类非线性刚性积分微分方程，获得了方法的收缩性条件。

关键词：积分微分方程；Runge-Kutta方法；收缩性

中图分类号：O241.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673−9833(2009)03−0026−03

Contractivity of Runge-Kutta Methods for Nonlinear Integro-Differential Equations

Chen Zhigang

（Zhuzhou Professional Technology College，Zhuzhou Hunan 412000，China）

Abstract: The Runge-Kutta method is applied to solve $D(\alpha,\beta,\gamma)$ nonlinear rigid integro-differential equations and the contractive conditions for the methods are derived.

Keywords: integro-differential equation; Runge-Kutta methods; contractivity

0　引言

积分微分方程广泛出现于生态学、核反应、控制理论等领域[1]，由于其理论解一般难以获得，只能用数值方法进行计算，因而其算法理论的研究十分必要。近年来，针对不同类型的积分微分方程，许多学者对其数值方法的理论进行了深入研究，取得了众多研究成果[2-5]。针对一类刚性积分微分方程，文献[6]研究的数值方法是单支θ−方法，其中积分采用复化梯形公式计算，在一定的条件下成立稳定性不等式：

$$\| y_n - z_n \| \le k \| y_0 - z_0 \|,$$

其中k是一常数，$k=\sqrt{1+\beta\gamma T^2}$。在此基础上，本文研究更广泛的一类数值方法，即Runge-Kutta方法求解刚性积分微分方程的数值稳定（单支θ−方法也可视为Runge-Kutta方法，但最高阶只有2阶），积分部分采用同样的Runge-Kutta公式计算（因此也称为Pouzet型Runge-Kutta方法，与文献[6]不同），获得了Runge-Kutta方法稳定的充分条件。

1　积分微分方程的收缩性

设$\langle\cdot,\cdot\rangle$是空间$C^N$中的内积，$\|\cdot\|$是相应的范数，考虑如下一般形式的非线性积分微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t), \int_0^t g(t,\theta,y(\theta))\mathrm{d}\theta\right), 0 \le t \le T, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

这里T是一适度大小的正数，

$f:[0,T]\times C^N \times C^N \to C^N$和$g: R\times R\times C^N \to C^N$

是给定的连续映射，并满足：

$$\mathrm{Re}\langle u_1 - u_2, f(t,u_1,v) - f(t,u_2,v)\rangle \le \alpha \|u_1 - u_2\|^2,$$
$$0 \le t \le T,\ u_1, u_2, v \in C^N, \tag{2}$$

$$\|f(t,u,v_1) - f(t,u,v_2)\| \le \beta \|v_1 - v_2\|,$$
$$0 \le t \le T,\ u, v_1, v_2 \in C^N, \tag{3}$$

$$\|g(t,\theta,w_1) - g(t,\theta,w_2)\| \le \gamma \|w_1 - w_2\|,$$
$$0 \le t \le T,\ 0 \le \theta \le t,\ w_1, w_2 \in C^N, \tag{4}$$

收稿日期：2009−03−12

作者简介：陈志钢（1973−），男，湖南湘潭人，株洲职业技术学院讲师，主要研究方向为泛函微分方程算法理论及应用，E-mail：czg731123@163.com

这里α, β和γ是适度大小的实常数，而条件（2）意味着允许函数$f(t,u,v)$关于第二个变元u具有刚性。与文献[6]类似，把满足条件（2）~（4）的所有问题（1）称为问题类$D(\alpha,\beta,\gamma)$。

为研究问题（1）的稳定性，引入相应的扰动问题

$$\begin{cases} z'(t) = f\left(t, z(t), \int_0^t g(t,\theta,z(\theta))\mathrm{d}\theta\right), \ 0 \le t \le T, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{5}$$

并设问题（1）和（5）分别有唯一真解。

作为 Volterra 泛函微分方程的一个重要类型，将文献[7]中定理 1 应用于积分微分方程初值问题（1），得定理 1。

定理 1　若问题（1）属于问题类$D(\alpha,\beta,\gamma)$且满足$\alpha+\beta\gamma T\le 0$，则

$$\|y(t)-z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|, 0 \le t \le T, \tag{6}$$

上式表征问题（1）的收缩性。

2　Runge-Kutta 方法的收缩性

以$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$表示求解常微分方程的$s$级 Runge-Kutta 方法，其中

$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$为$s\times s$矩阵，向量$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_s]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_s]^{\mathrm{T}}$，并设$0\le c_i\le 1, i=1,2,\cdots,s, \sum_{j=1}^{s} b_j = 1$。

将 Runge-Kutta 方法$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$用于求解问题（1）得

$$\begin{cases} Y_i^{(n)} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f\left(t_n + c_j h, Y_j^{(n)}, G_j^{(n)}\right), \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f\left(t_n + c_i h, Y_i^{(n)}, G_i^{(n)}\right), \\ \qquad i=1,2,\cdots,s;\ n=0,1,2,\cdots, \end{cases} \tag{7}$$

$h>0$是积分步长，$t_n=nh, (n+1)h\le T$，y_n和$Y_i^{(n)}$分别是$y(t_n)$和$y\left(t_n+c_ih\right)$的逼近，$G_i^{(n)}$是$\int_0^{t_n+c_ih} g\left(t_n+c_ih,\theta,y(\theta)\right)\mathrm{d}\theta$的逼近，由同样的 Runge-Kutta 公式可得

$$G_i^{(n)} = h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} g\left(t_n+c_ih, t_n+c_jh, Y_j^{(n)}\right) + h\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} b_j g\left(t_n+c_ih, t_{n-k}+c_jh, Y_j^{(n-k)}\right)。 \tag{8}$$

类似地，应用同样的方法于问题（5）有

$$\begin{cases} Z_i^{(n)} = z_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f\left(t_n + c_j h, Z_j^{(n)}, H_j^{(n)}\right), \\ z_{n+1} = z_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f\left(t_n + c_i h, Z_i^{(n)}, H_i^{(n)}\right), \\ \qquad i=1,2,\cdots,s;\ n=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{9}$$

$$H_i^{(n)} = h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} g\left(t_n+c_ih, t_n+c_jh, Z_j^{(n)}\right) + h\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} b_j g\left(t_n+c_ih, t_{n-k}+c_jh, Z_j^{(n-k)}\right)。 \tag{10}$$

这里z_n和$Z_i^{(n)}$分别是$z(t_n)$和$z\left(t_n+c_ih\right)$的逼近，$H_i^{(n)}$是$\int_0^{t_n+c_ih} g\left(t_n+c_ih,\theta,z(\theta)\right)\mathrm{d}\theta$的逼近。

定义 1　（见文献[8]）Runge-Kutta 方法$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$称为是代数稳定的，如果

$\boldsymbol{b}\ge 0$，$diag(\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}diag(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\ge 0$。

这里矢量$\boldsymbol{b}\ge 0$指该矢量的每个分量$b_i\ge 0$，$i=1,2,\cdots,s$，一个实对称矩阵$\boldsymbol{M}\ge 0$是指该矩阵非负定。

对代数稳定的 Runge-Kutta 方法，记为定理 2

定理 2　若求解常微分方程的 Runge-Kutta 方法$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$是代数稳定的且问题类$D(\alpha,\beta,\gamma)$的参数满足$\alpha+\dfrac{B\beta\lambda sT}{b_{\min}}\le 0$，那么此方法求解$D(\alpha,\beta,\gamma)$类问题（1）和（5）得到的数值解$y_n$和$z_n$满足如下收缩性不等式：

$$\|y_n - z_n\| \le \|y_0 - z_0\|, \ n=0,1,2,3,\cdots,\ nh\le T。 \tag{11}$$

证明　记$w_n = y_n - z_n, W_i^n = Y_i^n - Z_i^n$，

$$Q_i^{(n)} = f\left(t_n+c_ih, Y_i^{(n)}, G_i^{(n)}\right) - f\left(t_n+c_ih, Z_i^{(n)}, H_i^{(n)}\right),$$
$$i=1,2,\cdots,s。$$

于是由式（7）和（8）得

$$W_i^{(n)} = w_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} Q_j^{(n)}, \ i=1,2,\cdots,s。 \tag{12}$$

$$w_{n+1} = w_n + h\sum_{j=1}^{s} b_j Q_j^{(n)}。 \tag{13}$$

由此易得（参见文献[8]）

$$\|w_{n+1}\|^2 - \|w_n\|^2 - 2\sum_{i=1}^{s} b_i \operatorname{Re}\left\langle W_i^{(n)}, hQ_i^{(n)}\right\rangle = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} M_{ij}\left\langle \gamma_i, \gamma_j\right\rangle, \tag{14}$$

这里M_{ij}为矩阵$\boldsymbol{M}=diag(\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}diag(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$的第$i$行$j$列的元，$\gamma_j = hQ_j^{(n)}, j=1,2,\cdots,s$。于是由 Runge-Kutta 方法$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$的代数稳定性并利用条件（2）~（4），由式（14）得

$$\begin{aligned}
&\|w_{n+1}\|^2 \le \|w_n\|^2 + 2h\sum_{i=1}^{s} b_i \operatorname{Re}\left\langle W_i^{(n)}, Q_i^{(n)}\right\rangle \le \\
&\|w_n\|^2 + \sum_{i=1}^{s} b_i h\left[2\alpha\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 + 2\beta\left\|W_i^{(n)}\right\|\left\|G_i^n - H_i^n\right\|\right] \le \|w_n\|^2 + \\
&\sum_{i=1}^{s} b_i h\left[2\alpha\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 + 2\beta\gamma h\left\|W_i^{(n)}\right\|\left(\sum_{j=1}^{s}\left|a_{ij}\right|\left\|W_j^{(n)}\right\| + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} b_j\left\|W_j^{(n-k)}\right\|\right)\right] \le \\
&\|w_n\|^2 + \sum_{i=1}^{s} b_i h\left[2\alpha\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 + 2B\beta\gamma h\left\|W_i^{(n)}\right\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left\|W_j^{(n-k)}\right\|\right] \le \\
&\|w_n\|^2 + \\
&\sum_{i=1}^{s} b_i h\left[2\alpha\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 + B\beta\gamma s(n+1)h\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 B\beta\gamma h\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left\|W_j^{(n-k)}\right\|^2\right] \le \\
&\|w_n\|^2 + \sum_{i=1}^{s} b_i h\left[\left((2\alpha + B\beta\gamma sT)\left\|W_i^{(n)}\right\|^2 + B\beta^{3}h\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{s}\left\|W_j^{(n-k)}\right\|^2\right)\right],
\end{aligned} \tag{15}$$

由于Runge-Kutta方法$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$代数稳定，故

$b_{\min} \le 1$，因此当$\alpha + \dfrac{B\beta\gamma sT}{b_{\min}} \le 0$时，

$$\alpha + B\beta\gamma sT \le \alpha + \frac{B\beta\gamma sT}{b_{\min}} \le 0,$$

于是由式（15）有

$$\|w_{n+1}\|^2 \le \|w_n\|^2 + \sum_{i=1}^{s} b_i h \left[\alpha \left\| W_i^{(n)} \right\|^2 + B\beta\gamma h \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{s} \left\| W_j^{(n-k)} \right\|^2 \right], \tag{16}$$

上式递推下去并注意$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$得

$$\begin{aligned} \|w_{n+1}\|^2 \le{} & \|w_n\|^2 + \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i h \left[\alpha \left\| W_i^{(l)} \right\|^2 + B\beta\lambda h \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=1}^{s} \left\| W_j^{(l-k)} \right\|^2 \right] \le \\ & \|w_n\|^2 + \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i h\alpha \left\| W_i^{(l)} \right\|^2 + \sum_{l=0}^{n} B\beta\gamma h^2 \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=1}^{s} \left\| W_j^{(l-k)} \right\|^2 \le \\ & \|w_n\|^2 + \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i h\alpha \left\| W_i^{(l)} \right\|^2 + \sum_{l=0}^{n} b_i \frac{B\beta\gamma h^2}{b_{\min}} (n+1) \sum_{i=1}^{s} \left\| W_i^{(l)} \right\|^2 \le \\ & \|w_n\|^2 + \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=1}^{s} b_i h \left(\alpha + \frac{B\beta\gamma T}{b_{\min}} \right) \left\| W_i^{(l)} \right\|^2 。\end{aligned} \tag{17}$$

利用条件$\alpha + \dfrac{B\beta\gamma sT}{b_{\min}} \le 0$，由式（16）易知

$$\|w_{n+1}\|^2 \le \|w_n\|^2 。$$

于是

$$\|y_n - z_n\| \le \|y_0 - z_0\|，n = 1, 2, 3, \cdots, \quad nh \le T 。$$

由此完成定理2的证明。

注1 将文献[9]中关于刚性积分微分方程的B-稳定不等式应用于积分微分方程（1）得到

$$\|y_n - z_n\| \le Q(t_n) \|y_0 - z_0\|，t_n \le T, \tag{18}$$

其中$Q(t_n)$是一个与t_n有关且呈指数增长的函数，显然本文得到的Runge-Kutta方法关于积分微分方程的收缩性不等式（3）更好地描述了数值方法的稳定性，但其条件较文献[9]更为苛刻。

注2 当积分微分方程没有积分项，也即问题（1）退化为常微分方程初值问题，定理1表明代数稳定的Runge-Kutta方法是BN-稳定的。

参考文献：

[1] Kolmanovskii V B，Myshkis A D. Applied Theory of Functional Differential Equation[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1992.

[2] Brunner H. The Approximate Solution of Initial-Value Problems for General Volterra Integro-Differential Equations [J]. Computing，1988(40)：125-137.

[3] Ford N J，Baker C T H，Roberts J A. Nonlinear Volterra Integeo-Differential Equations Stability and Numerical Stability of Methods[J]. J. Integral Eq. Appl.，1998(10)：397-416.

[4] Makroglou A. Extended Backward Differentiation Methods in the Numerical Solution of Neutral Volterra Integro-Differential Equations[J]. Nonlinear Analysis，Theory，methods & Applications，1997(30)： 1515-1530.

[5] Vecchil A. Stability of Backward Differentiation Formulas for Volterra Integro-Differential Equations[J]. J. Comput. Appl. Math，2000(115)：565-576.

[6] 余越昕，文立平. 非线性积分微分方程单支-方法的稳定性分析[J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2005，29(2)：153-155.
Yu Yuexin, Wen Liping. Stability Analysis of One-Leg-Methods for Nonlinear Integro-Differential Equations[J]. Journal of Jangxi Normal University：Natural Science，2005，29(2)：153-155.

[7] 李寿佛. Banach空间中非线性刚性Vloterra泛函微分方程稳定性分析[J]. 中国科学(A辑：数学)，2005(35)：286-301.
Li Shoufo. Stability Analysis of Nonlinear and Rigid Vloterra Functional Differential Equations in Banach Space[J]. Science in China(Ser.A Mathematics)，2005(35)：286-301.

[8] Burrage K，Butcher J C. Stability Creteria for Implicit Runge-Kutta Methods[J]. Siam. J. Numer. Anal.，1979(16)：46-57.

[9] Li S F. B-Theory of Runge-Kutta Methods for Stiff Volterra Functional Differential Equations[J]. Science in China(Ser.A Mathematics)，2003(46)：662-674.

（责任编辑：罗立宇）