第23卷 第3期　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　Vol.23 No.3
2009年5月　　Journal of Hunan University of Technology　　May 2009

带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性

叶国炳，周小奇

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：解决了一类带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的非振动解与其一阶、二阶导数的符号关系，得到其振动性与渐近性的判别准则，并举例说明了准则的有效性。

关键词：强迫项；脉冲时滞；微分方程；振动性；渐近性

中图分类号：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673–9833(2009)03–0022–04

Oscillatory and Asymptotic Properties of Third Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term

Ye Guobing，Zhou Xiaoqi

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract: The sign relations between the non-oscillatory solutions for a class of third order impulsive delay differential equations with forcing term and their derived functions of first and second order are settled. Some criterions for discriminating the oscillatory and asymptotic properties of the solutions are obtained. Finally one example is given to illustrate the effectiveness of the criterions.

Keywords: forcing term; impulsive delay; differential equations; oscillation; asymptotic property

0　引言

对于脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性研究，已有一些很好的结论，但这些结论一般是不带强迫项的，即使带强迫项的也是阶数较低的[1-2]。受文献[1-3]启发，本文对一类带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程进行研究，得到其振动性与渐近性准则，并举例说明准则的有效性。

本文考虑

$$\begin{cases} x'''(t)+p(t)x(t-\tau)=q(t),\ t>t_0,\ t\neq t_k,\ k\in\mathbf{N}; \\ x(t_k^+)=a_{0k}x(t_k),\ x^{(i)}(t_k^+)=a_{ik}x^{(i)}(t_k^-),\ i=1,2; \\ x=\varphi(t), \qquad t\in[t_0-\tau,\ t_0], \end{cases} \tag{1}$$

解的振动性与渐近性，其中 $0\le t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$，$0<\tau\le t_{k+1}-t_k<+\infty$，$\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=+\infty\ (k\in\mathbf{N})$；$a_{ik}\ (i=0,1,2)$ 均为大于0的常数，且 $a_{0k}\neq1\ (k\in\mathbf{N})$；

$p(t)\in PC\{[t_0,+\infty),\mathbf{R}^+\}$，$q(t)\in PC\{[t_0,+\infty),\mathbf{R}^-\}$，且它们在 $(t_k,t_{k+1}]\ (k\in\mathbf{N}\cup\{0\})$ 上均不最终恒为0；

$\varphi\in C\{[t_0-\tau,t_0],\mathbf{R}\}$，且 φ''' 在 $(t_0-\tau,t_0)$ 上几乎处处（a.e.）存在，并且至多有可数个第一类间断点；

$$x^{(i)}(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\frac{x^{(i-1)}(t)-x^{(i-1)}(t_k^+)}{t-t_k},$$

$$x^{(i)}(t_k^-)=\lim_{t\to t_k^-}\frac{x^{(i-1)}(t)-x^{(i-1)}(t_k^-)}{t-t_k}\ (i=1,2)。$$

定义　函数 $x(t):[t_0-\tau,+\infty)\to\mathbf{R}$ 称为方程（1）的解，如果满足：

收稿日期：2009-03-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10571050）
作者简介：叶国炳（1962-），男，广东龙川人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事微分方程方面的教学与研究，E-mail：yeguobing19@sina.com

i）$x=\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau,\ t_0]$；

ii）当 $t\neq t_k,\ t\neq t_k+\tau(k\in\mathbf{N})$ 时，$x(t)$ 恒满足 $x'''(t)+p(t)x(t-\tau)=q(t)$；且 $x(t)\in C\{(t_k,t_{k+1}],\mathbf{R}\}$ $(k\in\mathbf{N}\cup\{0\})$，$x'''(t)$ 在 $(t_k,t_{k+1})(k\in\mathbf{N}\cup\{0\})$ 内 a.e.存在，并至多有可数个第一类间断点；

iii）$x(t_k)\neq 0$，$x(t_k^+)=a_{0k}x(t_k)$，$x^{(i)}(t_k^+)=a_{ik}x^{(i)}(t_k^-)$ $(i=1,2)$。

1　主要结论

引理 1　设 $x(t)$ 为方程（1）满足条件 (H)：$x(t)\in C^2\{(t_k,t_{k+1}),\mathbf{R}\}(k\in\mathbf{N}\cup\{0\})$ 的任意有界解，若存在 $T\ge t_0$，使得 $t\ge T$ 时，$x(t-\tau)>0(<0)$，且有条件 (A_i)：$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{i\ s+1}a_{i\ s+2}\cdots a_{i\ s+m}}{a_{i-1\ s+1}a_{i-1\ s+2}\cdots a_{i-1\ s+m}}(t_{s+m+1}-t_{s+m})=+\infty$ $(s\in\mathbf{N},\ i=1,2)$；(B)：$\lim\limits_{m\to+\infty}a_{01}a_{02}\cdots a_{0m}>0$，则存在 $T_0\ge T$，当 $t_k\ge T_0$，$t\in(t_k,t_{k+1})$ 时，

$x''(t_k^-)>0(<0)$，$x'(t_k^-)<0(>0)$，

$x''(t)>0(<0)$，$x'(t)<0(>0)$。

证明　仅就括号外情形证明。证明存在 $T_{01}\ge T$，当 $t_k\ge T_{01}$、$t\in(t_k,t_{k+1})$ 时，有 $x''(t_k^-)\ge 0$，$x''(t)>0$。

先证明存在 $T_1\ge T$，当 $t_k\ge T_1$ 时有 $x''(t_k^-)\ge 0$，否则存在 $t_{s_1}\ge T_1$，$x''(t_{s_1}^-)<0$。于是 $x''(t_{s_1}^+)=a_{2s_1}x''(t_{s_1}^-)<0$，设 $x''(t_{s_1}^+)=-\alpha_1$ $(\alpha_1>0)$。由 $p(t)\ge 0$，$x(t-\tau)>0$ $(t>T)$，$q(t)\le 0$ 以及 $x'''(t)=-p(t)x(t-\tau)+q(t)$（a.e.），有 $x'''(t)\le 0$ $(t\in(t_{s_1+l-1},\ t_{s_1+l}),\ l\in\mathbf{N})$（a.e.）。后续证明与文献[3]中的引理 1 后续证明类似，此处略去。

引理 2[4]　设 $x(t)\in C\{(t_k,t_{k+1}],\mathbf{R}\}\ (k\in\mathbf{N})$，且 $\lim\limits_{t\to t_k^+}x(t)$ 存在；

i）若存在 $\bar{t}\in\mathbf{R}^+$，使得 $x(t)>0\ (<0)(t\ge\bar{t})$；

ii）若存在 $m\in\mathbf{N}$，使得 $x(t)$ 在 $(t_k,t_{k+1}](k\ge m)$ 上单调不增（不减）；

iii）若 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left[x(t_k^+)-x(t_k)\right]$ 收敛，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=r$ 存在，且 $r\ge 0(\le 0)$。

利用引理 2 很容易证明下面的引理 3 成立。

引理 3　设 $x(t)\in C\{(t_k,t_{k+1}],\mathbf{R}\}(k\in\mathbf{N})$，并且 $x(t)$ 有界，

i）若存在 $\bar{t}\in\mathbf{R}^+$，使得 $x(t)>0(t\ge\bar{t})$；

ii）若存在 $m\in\mathbf{N}$，使得 $x(t)$ 在 $(t_k,t_{k+1}](k\ge m)$ 上单调不增；

iii）若 $x(t_k^+)=a_{0k}x(t_k)$ $(k\in\mathbf{N})$，其中 $0<a_{0k}<1$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=r$ 存在，且 $r\ge 0$。

定理 1　设引理 1 的条件（H）、（A_i）（i=1, 2）与（B）成立，$0<a_{ik}\le 1$（$k\in\mathbf{N}$，$i=1,2$），且 $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$ 收敛或 $0<a_{0k}<1$（$k\in\mathbf{N}$），

1）若 $\int^{+\infty}t^2p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，则方程（1）的任意有界解或者振动或者最终定号趋于 0；

2）若 $\int^{+\infty}t^2q(t)\mathrm{d}t=-\infty$，则方程（1）的任意有界解是振动的。

证明　设方程（1）有一非振动有界解 $x(t)$，不妨设存在 $T>t_0$，当 $t>T$ 时，有 $x(t-\tau)>0$，当然有 $x(t)>0$。由引理 1 知，存在 $T_0\ge T$，当 $t_k\ge T_0$，$t\in(t_k,t_{k+1})$ 时，有 $x''(t_k^-)>0$，$x'(t_k^-)<0$，$x''(t)>0$，$x'(t)<0$。从而 $x(t)$ 在 $t\in(t_k,t_{k+1}](t_k\ge T_0)$ 上严格递减。

若 $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$ 收敛，可得 $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|x(t_k^+)-x(t_k)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|x(t_k)$ 收敛，由引理 2 知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=r$ $(0\le r<+\infty)$；若 $0<a_{0k}<1$，由引理 3 知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=r$ $(0\le r<+\infty)$。当然，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t-\tau)=r(0\le r<+\infty)$。

下面证明 $r=0$。否则有 $r>0$，从而存在 $T_1>T_0$，使得当 $t_k\ge T_1$，$t\in(t_k,t_{k+1}]$ 时，有 $x(t-\tau)>\frac{r}{2}$。记 $s=\min\limits_{t_k\ge T_1}t_k$，从而由式（1）得

$$x'''(t)=-p(t)x(t-\tau)+q(t)\le -p(t)x(t-\tau)<-\frac{r}{2}p(t),\quad t\in(t_{s+l-1},t_{s+l}),\ l\in\mathbf{N}\quad\text{(a.e.)}。\tag{2}$$

式（2）两边同乘以 t^2，再从 t_{s+1} 到 t_{s+l} 积分得

$$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^2x'''(t)\mathrm{d}t\le-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^2p(t)\mathrm{d}t。\tag{3}$$

i）当 $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$ 收敛时，

$$\begin{aligned}&\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}t^2x'''(t)\mathrm{d}t=\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}t^2\mathrm{d}x''(t)=t^2x''(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-\\&2tx'(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}+2x(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}=\left[t_{s+m+1}^2x''(t_{s+m+1}^-)-\right.\\&\left.t_{s+m}^2x''(t_{s+m}^+)\right]-2\left[t_{s+m+1}x'(t_{s+m+1}^-)-t_{s+m}x'(t_{s+m}^+)\right]+\\&2\left[x(t_{s+m+1})-x(t_{s+m}^+)\right]=\left[t_{s+m+1}^2x''(t_{s+m+1}^-)-\right.\\&\left.a_{2\ s+m}t_{s+m}^2x''(t_{s+m}^-)\right]-2\left[t_{s+m+1}x'(t_{s+m+1}^-)-\right.\\&\left.a_{1\ s+m}t_{s+m}x'(t_{s+m}^-)\right]+2\left[x(t_{s+m+1})-a_{0\ s+m}x(t_{s+m})\right],\\&(m=1,2,\cdots,l-1),\end{aligned}$$

则$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 x'''(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{l-1}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^2 x'''(t)\mathrm{d}t=\Big[t_{s+l}^2 x''(t_{s+l}^-)+\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{2\,s+m})t_{s+m}^2 x''(t_{s+m}^-)-a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)\Big]-2\Big[t_{s+l}x'(t_{s+l}^-)+\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{1\,s+m})t_{s+m}x'(t_{s+m}^-)-a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)\Big]+2\Big[x(t_{s+l})+\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})-a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]=\Big\{t_{s+l}^2 x''(t_{s+l}^-)+2t_{s+l}\big[-x'(t_{s+l}^-)\big]\Big\}+\sum_{m=2}^{l-1}\Big\{(1-a_{2\,s+m})t_{s+m}^2 x''(t_{s+m}^-)+2(1-a_{1\,s+m})t_{s+m}\cdot\big[-x'(t_{s+m}^-)\big]\Big\}+2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}\cdot x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})$，

即
$$2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 x'''(t)\mathrm{d}t。\tag{4}$$

由式（3）、（4）可得：
$$2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}\cdot x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 p(t)\mathrm{d}t。\tag{5}$$

同理可得
$$2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}\cdot x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 q(t)\mathrm{d}t。\tag{6}$$

ii）当$0<a_{0\,k}<1$时，与 i）同理可得
$$2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]<-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 p(t)\mathrm{d}t。\tag{7}$$
$$2x(t_{s+l})-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]<\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^2 q(t)\mathrm{d}t。\tag{8}$$

在式（5）或（7）中，由$\int^{+\infty} t^2 p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0\,k}-1|x(t_k)$收敛；或$\int^{+\infty} t^2 p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=-\infty$。这与$x(t)$是有界解矛盾，从而$r$=0。则方程（1）的任意有界解或振动、或最终定号趋于0。在式（6）或式（8）中，由$\int^{+\infty} t^2 q(t)\mathrm{d}t=+\infty$，$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0\,k}-1|x(t_k)$收敛；或$\int^{+\infty} t^2 q(t)\mathrm{d}t=+\infty$，得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=-\infty$，这与$x(t)$是有界解矛盾，从而方程（1）的任意有界解是振动的。

定理2 设引理1的条件（H）、（A_i）（i=1,2）与（B）成立，$0<a_{ik}\le 1\ (k\in\mathbf{N},\ i=1,2)$，且$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0\,k}-1|$收敛或$0<a_{0\,k}<1\ (k\in\mathbf{N})$，还有条件
$$(D):\ \frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\le\left(\frac{t_{s+m}}{t_{s+1}}\right)^2\quad(m,s\in\mathbf{N})。$$

1）若有条件
$$(C_1):\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}p(t)\mathrm{d}t=+\infty\ (s\in\mathbf{N}),$$
则方程（1）的任意有界解或振动、或最终定号趋于0；

2）若有条件
$$(C_2):\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=-\infty\ (s\in\mathbf{N}),$$
则方程（1）的任意有界解是振动的。

证明 由于定理2的许多条件与定理1中一样，因此在“设方程（1）有一非振动有界解$x(t)$，不妨设存在$T>t_0$，当$t>T$时，有$x(t-\tau)>0$”的前提下，式(2~4)均可运用。

i）当$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0\,k}-1|$收敛时，由式（4）可得：
$$-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^2x'''(t)\mathrm{d}t。\tag{9}$$

由条件（D）可得：
$$\frac{r}{2}t_{s+1}^2\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{s+m}^{s+m+1}p(t)\mathrm{d}t\right)\le\frac{r}{2}t_{s+1}^2\left[\sum_{m=1}^{l-1}\left(\frac{t_{s+m}}{t_{s+1}}\right)^2\int_{s+m}^{s+m+1}p(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{l-1}t_{s+m}^2\int_{s+m}^{s+m+1}p(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\int_{s+m}^{s+m+1}t_{s+m}^2\,p(t)\mathrm{d}t\right)\le\frac{r}{2}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\int_{s+m}^{s+m+1}t^2p(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{r}{2}\int_{s+1}^{s+l}t^2p(t)\mathrm{d}t。\tag{10}$$

由式（3）、（9）、（10）可得：
$$\frac{r}{2}t_{s+1}^2\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{s+m}^{s+m+1}p(t)\mathrm{d}t\right)<\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]-2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})。\tag{11}$$

同理可得
$$t_{s+1}^2\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{s+m}^{s+m+1}q(t)\mathrm{d}t\right)>-\Big[a_{2\,s+1}t_{s+1}^2 x''(t_{s+1}^-)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'(t_{s+1}^-)+2a_{0\,s+1}x(t_{s+1})\Big]+2\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})。\tag{12}$$

ii）当$0<a_{0\,k}<1$时，与 i）同理可得：

$$\frac{r}{2}\, t_{s+1}^{2}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{s+m}^{s+m+1}p(t)\mathrm{d}t\right)<$$
$$a_{2\,s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)+2a_{0\,s+1}x\left(t_{s+1}\right)。\quad(13)$$

$$t_{s+1}^{2}\left(\sum_{m=1}^{l-1}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{2\,s+1}a_{2\,s+2}\cdots a_{2\,s+m}}\int_{s+m}^{s+m+1}q(t)\mathrm{d}t\right)>$$
$$-\left[a_{2\,s+1}t_{s+1}^{2}x''\left(t_{s+1}^{-}\right)-2a_{1\,s+1}t_{s+1}x'\left(t_{s+1}^{-}\right)+2a_{0\,s+1}x\left(t_{s+1}\right)\right]。\quad(14)$$

令$l\to+\infty$，对式（11）或式（13）两边取极限，由条件(C_1)，$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1||x(t_k)|$收敛；或由条件$(C_1)$，得两式左边趋于$+\infty$，与右边有限矛盾，从而$r=0$，则方程（1）的任意有界解或振动、或最终定号趋于0。令$l\to+\infty$，对式（12）或式（14）两边取极限，由条件(C_2)，$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1||x(t_k)|$收敛；或由条件$(C_2)$，得两式左边趋于$-\infty$，与右边有限矛盾。则方程（1）的任意有界解是振动的。

2　应用举例

例　考虑方程

$$\begin{cases} x'''(t)+p(t)x\left(t-\dfrac{3\pi}{2}\right)=q(t),\quad t>t_0,\quad t\neq t_k,\quad k\in\mathbf{N};\\ x\left(t_k^{+}\right)=a_{0k}x\left(t_k\right),\quad x^{(i)}\left(t_k^{+}\right)=a_{ik}x^{(i)}\left(t_k^{-}\right),\quad i=1,2;\\ x=\varphi(t),\quad t\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]。\end{cases}\quad(15)$$

式(15)中，$t_0=\dfrac{3\pi}{2}$，$t_k=2k\pi$，$a_{ik}=\left(1+\dfrac{1}{k+2}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$ $(k\in\mathbf{N},\ i=0,1,2)$；

$$p(t)=\begin{cases}1,\quad t\in\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2n\pi\right];\\ \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{n}}\right),\quad t\in\left(2n\pi,\ 2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]。\end{cases}$$

$$q(t)=-\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{4},\ t\in\left(2n\pi-\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right],\ n\in\mathbf{N}。$$

显然方程（15）满足引理1的条件（H）、$(A_i)(i=1,2)$与（B），且$0<a_{0k}<1$，$0<a_{ik}\le1(k\in\mathbf{N},\ i=1,2)$。

对于$\forall T>0$，不妨设

$T\in\left(2n_0\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2n_0\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](n_0\in\mathbf{N})$，则

$$\int_T^{+\infty}t^2p(t)\mathrm{d}t\ge\int_T^{+\infty}p(t)\mathrm{d}t\ge\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(n_0+m)\pi-\frac{\pi}{2}}^{2(n_0+m)\pi}p(t)\mathrm{d}t=$$

$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(n_0+m)\pi-\frac{\pi}{2}}^{2(n_0+m)\pi}\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{\pi}{2}=+\infty$，即$\int_T^{+\infty}t^2p(t)\mathrm{d}t=+\infty$。从而定理1中i）的条件均满足，则方程（15）的任意有界解或者振动、或者最终定号趋于0。实际上：

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},\qquad t=0;\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\cos t-\dfrac{1}{2}\right),\\ \qquad t\in(2n\pi,\ 2n\pi+2\pi\ ],n\in\mathbf{N}\cup\{0\},\end{cases}$$

为方程（15）的一个有界振动解，其中

$$\varphi(t)=\cos t-\frac{1}{2},\ t\in\left[0,\ \frac{3\pi}{2}\right]。$$

参考文献：

[1] Li W N，Han M A. Oscillations of Solutions for Certain Impulsive Vector Parabolic Differential Equations with Delays [J]. J. Math. Anal. Appl, 2007，326(2)：363-371.

[2] Tang D Q，Chen Y S. Oscillations of Impulses Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. J. of Math (PRC)，2005，25(3)：549-552.

[3] 陈福来，文贤章. n阶线性脉冲微分方程的振动性[J]. 数学学报，2006，29(3)：527-541.
Chen Fulai，Wen Xianzhang. Oscillations of *N*-Order Linear Differential Equation with Impulses[J]. Acta Mathematicae Sinica，2006，29(3)：527-277.

[4] 申建华，庾建设. 具有脉冲扰动的非线性时滞微分方程[J]. 应用数学，1996，9(3)：272-277.
Shen Jianhua，Yu Jianshe. On Nonlinear Delay Differential Equations with Impulsive Perturbations[J]. Mathematica Applicatae(PRC)，1996，9(3)：272-277.

[5] Gracf J R，Shen J H，Stavroulakis I P. Oscilation of Impulsive Neutral Delay Differential Equations[J]. J. Math. Anal. Appl，2002，268：310-333.

[6] Yan J R，Zhao A M，Zhang Q X. Oscillation Properties of Nonlinear Impulsive Delay Differential Equations and Applications to Population Models[J]. J. Math. Anal. Appl，2006，322(10)：359-370.

（责任编辑：廖友媛）