第23卷 第2期
2009年4月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.23 No.2
Apr. 2009

图像复原模型的Euler-Lagrange方程

刘福保

（长沙民政职业技术学院，湖南 长沙 410004）

摘 要：在对图像复原模型进行简单介绍的基础上，利用变分基本引理推导出3个常用图像复原模型的Euler-lagrange方程，并对所得方程进行了证明。

关键词：变分法；Euler-Lagrange方程；图像复原；总变分

中图分类号：O243 **文献标识码**：A **文章编号**：1673-9833(2009)02-0055-03

The Euler-Lagrange Equation for Image Restoration Model

Liu Fubao

（Changsha Social Work College，Changsha 410004，China）

Abstract: Based on the brief introduction for image restoration and by using the variation basic lemma, we derive Euler-Lagrange equation from three common image restoration models. Then it proves its corresponding equation.

Key words: variational method; Euler-Lagrange equation; image restoration; total variation

0 引言

图像在传输、采集或存贮的过程中，经常引入噪音和模糊量，因而图像复原是图像处理中的一个基本问题。在一定意义上讲，图像复原模型是一个泛函求极值问题，因此图像复原模型可以看成一个变分问题。令$u:\Omega\subset R^2\to R$表示原始图像，$f(x,y)$为退化图像，$K(x,y)$表示模糊的线性算子，$\eta(x,y)$为随机高斯白噪音，则退化图像模型为：

$f(x,y)=K(x,y)\,u(x,y)+\eta(x,y)$。

图像复原的任务就是在已知退化图像$f(x,y)$和噪音$\eta(x,y)$以及点线性算子$K(x,y)$的情况下，求出原始图像$u(x,y)$。从数学意义上讲，图像复原问题是个不适定问题，因而需要对其正则化。基于Tikhonov正则化方法[1]的图像复原模型可写为：

$$\min_{u\in\Omega}\frac{1}{2}|Ku-f|_{L^2}^2+\lambda J(u),\qquad(1)$$

其中，$\frac{1}{2}|Ku-f|_{L^2}^2$为保真项，$\lambda$为正则化参数，$J(u)$为正则化项。

在求解式（1）的过程中，一般情况下是先求出对应的Euler-lagrange方程，然后利用相对应的数值方法解这个方程。但在大多数已有文献中，并没有具体的求导这个方程的过程，即使有也相当繁琐[2,3]。因此，本文基于变分法推导了3个常用的图像复原模型的Euler-Lagrange方程。

1 图像复原模型

为克服图像复原过程中的不适定问题，Tikhonov和Arsenin[1]建议考虑如下修复模型：

$$\min_{u\in\Omega}\left|Ku-f\right|_{L^2(\Omega)}^2+\lambda\left|\nabla u\right|_{L^2(\Omega)}^2,\qquad(2)$$

其中，∇u是梯度算子，$u\in W^{1,2}(\Omega)$。

修复模型（2）由于在局部坐标区域内相当于各项同性扩散算子，因此能模糊图像的边缘区域。为克服模糊现象，Rudin等人提出了基于偏微分的总变分（Rudin Osher Fatemi，简称ROF）模型[2]：

$$\min_{u\in\Omega}\frac{1}{2}|Ku-f|_{L^2}^2+\lambda|u|_{BV},\qquad(3)$$

其中，λ为正则化因子，$|u|_{BV}$定义为：

$$|u|_{BV}=\int_\Omega|\nabla u|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty。$$

收稿日期：2008-12-31
作者简介：刘福保（1962-），男，湖南蓝山人，长沙民政职业技术学院高级讲师，主要从事变分法研究，E-mail: lfb620520@sina.com

由于ROF模型并不惩罚图像的不连续局域，并且能够有效地保护图像的边界，从而获得巨大成功。但是在图像的平滑区域，ROF模型的解是分片常量，因而导致所谓的阶梯现象，由于高阶Partial Derivatives Equations（简称PDE）要求更强的光滑性，从而能比ROF模型更有效地阻止震荡现象，在一定程度上克服了ROF模型所导致的阶梯现象。Lysaker等人在文献[3]中提出了一个高阶的PDE模型——四阶PED模型：

$$\min_{u\in\Omega}\frac{1}{2}|Ku-f|_{L^2}^2+\lambda|\nabla^2 u|, \quad (4)$$

其中，λ为正则化因子，$|\nabla^2 u|$定义为：

$$|\nabla^2 u|_{L^1}=\int_\Omega\sqrt{u_{xx}^2+u_{xy}^2+u_{yx}^2+u_{yy}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

2 图像复原模型的Euler-Lagrange方程

引理1（变分基本引理）[4] 设$f(x,y)\in L^2(\Omega)$，对任意$\varphi(x,y)\in C_0^\infty(\Omega)$，若$\int_\Omega f(x,y)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则$f(x,y)$几乎处处为0。

引理2[5] 设对任意$u(x,y)$都满足一定的边值条件，则泛函$L[u(x,y)]=$

$$\int_\Omega F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial xx},\frac{\partial^2 u}{\partial xy},\frac{\partial^2 u}{\partial yx},\frac{\partial^2 u}{\partial yy}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

存在极值的Euler-Lagrange方程（必要条件）为：

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)-\frac{\partial}{\partial xx}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)-$$

$$\frac{\partial}{\partial yx}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial xy}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial yy}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)=0,$$

其中，$p=\frac{\partial u}{\partial x},q=\frac{\partial u}{\partial y},r=\frac{\partial^2 u}{\partial xx},s=\frac{\partial^2 u}{\partial xy},t=\frac{\partial^2 u}{\partial yx},w=\frac{\partial^2 u}{\partial yy}$。

定理1 图像复原模型（2）的Euler-Lagrange方程满足$K^*Ku-K^*f-\lambda\Delta u=0$。 （5）

其中，K^*是K的伴随算子，u满足Neumann边值条件$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}=0$，$\boldsymbol{N}$是$\partial\Omega$的单位外法向量。

证明 令$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=(Ku-f)^2+\lambda|\nabla u|^2=$

$$(Ku-f)^2+\lambda\left[\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2\right], \quad (6)$$

不妨记$p=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$，$q=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$，则相对于式（6）有

$F_u=2(K^*Ku-K^*f)$，$F_p=2\frac{\partial u}{\partial x}$，$F_q=2\frac{\partial u}{\partial y}$。

由引理2得

$$2\left(K^*Ku-K^*f\right)-\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=0。$$

显然，图像复原模型（2）的Euler-Lagrange方程满足

$$K^*Ku-K^*f-\lambda\Delta u=0，$$

其中，u满足Neumann边值条件$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}=0$。

定理2 图像复原模型（3）的Euler-Lagrange方程满足$K^*Ku-K^*f-\lambda\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=0$。 （7）

其中，K^*是K的伴随算子，u满足Neumann边值条件$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}=0$，$\boldsymbol{N}$是$\partial\Omega$的单位外法向量。

证明 类似于定理1的证明，令

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(Ku-f)^2+\lambda|\nabla u|=$$

$$\frac{1}{2}(Ku-f)^2+\lambda\left[\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

记$p=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$，$q=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$，则相对于式（8）有

$F_u=K^*Ku-K^*f$，$F_p=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|\nabla u|}$，$F_q=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|\nabla u|}$。

由引理2得

$$K^*Ku-K^*f-\lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|\nabla u|}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|\nabla u|}\right)\right]=0,$$

也就是

$$K^*Ku-K^*f-\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{1}{|\nabla u|}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]=0,$$

因此，图像复原模型（3）的Euler-Lagrange方程满足

$$K^*Ku-K^*f-\lambda\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=0,$$

其中，u满足Neumann边值条件$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{N}}=0$。

定理3 图像复原模型（4）的Euler-Lagrange方程满足

$$K^*Ku-K^*f-\lambda\left[\left(\frac{u_{xx}}{|\nabla^2 u|}\right)_{xx}+\left(\frac{u_{xy}}{|\nabla^2 u|}\right)_{yx}+\left(\frac{u_{yx}}{|\nabla^2 u|}\right)_{xy}+\left(\frac{u_{yy}}{|\nabla^2 u|}\right)_{yy}\right]=0。 \quad (9)$$

其中，K^*是K的伴随算子，u满足边值条件

$$u_{xx}+u_{yx}=0，\left(\frac{u_{xx}}{|\nabla^2 u|}\right)_x+\left(\frac{u_{xy}}{|\nabla^2 u|}\right)_y=0，$$

$$u_{yy}+u_{xy}=0，\left(\frac{u_{yx}}{|\nabla^2 u|}\right)_x+\left(\frac{u_{yy}}{|\nabla^2 u|}\right)_y=0。$$

证 明

令$F\left(x,y,u,\frac{\partial^2 u}{\partial xx},\frac{\partial^2 u}{\partial xy},\frac{\partial^2 u}{\partial yx},\frac{\partial^2 u}{\partial yy}\right)=\frac{1}{2}(Ku-f)^2+$

$$\lambda\,|\nabla^2 u| = \frac{1}{2}(Ku-f)^2 + \lambda\left[\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial xx}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial xy}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial yx}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial yy}\right)^2\right]。\quad (10)$$

相对于式（10），令$r=\frac{\partial^2 u}{\partial xx}$，$s=\frac{\partial^2 u}{\partial xy}$，$t=\frac{\partial^2 u}{\partial yx}$，$w=\frac{\partial^2 u}{\partial yy}$，

从而有 $F_u = K^* K u - K^* f$，$F_r = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial xx}}{|\nabla^2 u|}$，$F_s = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial xy}}{|\nabla^2 u|}$，$F_t = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial yx}}{|\nabla^2 u|}$，$F_w = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial yy}}{|\nabla^2 u|}$。

由引理2知，图像复原模型（4）的Euler-Lagrange方程满足

$$K^*Ku - K^*f - \lambda\left[\frac{\partial}{\partial xx}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial xx}}{|\nabla^2 u|}\right)_{xx} + \frac{\partial}{\partial xy}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial yx}}{|\nabla^2 u|}\right) + \frac{\partial}{\partial yx}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial xy}}{|\nabla^2 u|}\right) + \frac{\partial}{\partial yy}\left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial yy}}{|\nabla^2 u|}\right)\right] = 0,$$

即

$$K^*Ku - K^*f - \lambda\left[\left(\frac{u_{xx}}{|\nabla^2 u|}\right)_{xx} + \left(\frac{u_{xy}}{|\nabla^2 u|}\right)_{yx} + \left(\frac{u_{yx}}{|\nabla^2 u|}\right)_{xy} + \left(\frac{u_{yy}}{|\nabla^2 u|}\right)_{yy}\right] = 0,$$

其中，u 满足边值条件

$$u_{xx}+u_{yx}=0，\quad \left(\frac{u_{xx}}{|\nabla^2 u|}\right)_x + \left(\frac{u_{xy}}{|\nabla^2 u|}\right)_y = 0，$$

$$u_{yy}+u_{xy}=0，\quad \left(\frac{u_{yx}}{|\nabla^2 u|}\right)_x + \left(\frac{u_{yy}}{|\nabla^2 u|}\right)_y = 0。$$

3　结语

本文归纳和总结了3个常用的图像复原模型，并利用变分原理推导和证明了这3个图像复原模型的Euler-Lagrange方程。这将有助于理解变分原理在图像复原模型中的应用。

参考文献：

[1] Tikhnonov A，Arsenin V. Solutions of Ill-Posed Problems [M]. NewYork：Halsteed Press，1977.

[2] Rudin L，Osher S，Fatemi E. Nolinear Total Variation Based on Noise Removal Algorithm[J]. Physica D，1992，60：259-268.

[3] Lysaker M，Lundervold A，Tai X. Noise Removal Using Fourth-Order Partial Differential Equations with Applications to Medical Magnetic Resonance Images in Space and Time[J]. IEEE Trans. Image Process，2003，12(12)：1579-1590.

[4] 李荣华. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
Li Ronghua. Numerical Solution of Partial Differential Equations [M]. Beijing：Higher Eduction Press，2005.

[5] 老大中. 变分法基础[M]. 北京：国防工业出版社，2004.
Lao Dazhong. Basic Variational Method[M]. Beijing：National Defense Industry Press，2004.

[6] 周启亚，杨高波. 像素域运动对象提取算法的研究[J]. 湖南工业大学学报，2008，22(6)：50-54.
Zhou Qiya, Yang Gaobo. Research on Moving Object Extraction from Video Pixel Domain[J]. Journal of Hunan University of Techndogy, 2008, 22(6)：50-54.

（责任编辑：廖友媛）