

# 螺旋锥齿轮数控磨削表面粗糙度的建模与分析

明兴祖<sup>1</sup>, 胡京明<sup>1</sup>, 刘赣华<sup>2</sup>

(1. 湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412008; 2. 江西理工大学 机电工程学院, 江西 赣州 341000)

**摘要:** 根据螺旋锥齿轮的数控磨削原理和齿面数学模型, 分析了单面法用直口杯砂轮展成螺旋锥齿轮时表面粗糙度的形成机理与影响因素。基于加工运动轨迹分析方法, 进行了数控磨削齿面的节点和接触迹线矢量计算, 通过网格划分, 将磨削3D理论残留面积高度转化为沿齿高方向各横向截面上的2D理论残留面积高度的计算, 并考虑磨削齿面材料的耕犁塑性变形, 建立了磨削表面粗糙度的计算模型。通过弧齿锥齿轮小轮的磨削表面粗糙度 $R_a$ 值的计算和试验验证分析, 结果表明: 齿轮展成速度增大时,  $R_a$ 值略有增加; 砂轮速度提高时,  $R_a$ 值可明显降低; 当磨削深度 $a$ 大于0.1 mm时,  $R_a$ 随 $a$ 变大而增加显著; 其他因素对 $R_a$ 也有不同程度的影响;  $R_a$ 实测值与计算值的相对误差最大绝对值为17.1%, 说明磨削表面粗糙度的理论建模有较好的精度, 为螺旋锥齿轮磨削质量的控制奠定了基础。

**关键词:** 螺旋锥齿轮; 数控磨削; 表面粗糙度; 模型; 分析

中图分类号: TH132.41

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2009)02-0037-08

## Research on Surface Roughness for Multi-Axis NC Grinding of Bevel Gear

Ming Xingzu<sup>1</sup>, Hu Jingming<sup>1</sup>, Liu Ganhua<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Hunnan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China;

2. School of Mechanical and Electronic Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi 341000, China)

**Abstract:** According to NC grinding principle and the tooth mathematical models of bevel gear, the forming principle and influencing factors of generating surface roughness of bevel gear are analyzed by the single blade method which used for the cup-shaped grinding wheel. Based on the analysis method of machining motion trajectory, the nodes and contact line vectors of NC grinding tooth are computed. Calculations of 3D theoretical residual area height are translated from ones of 2D along tooth highness cross section by grid compartmentalization, and the computing model of grinding surface roughness are setting up by taking a plastic scratch distortion into account. The computing and test validation analyzing results of grinding tooth surface roughness  $R_a$  of spiral bevel pinion have many. Firstly, the  $R_a$  values are raised a little as increasing the generation speed, while they are distinctly decreased as increasing the wheel speed. Secondly, when grinding depth( $a$ ) is more than 0.1 mm, they are increased greatly as heightening  $a$ , and also affected differently by other factors. Finally, the maximal absolute value of relative error between testing  $R_a$  values and computing ones is 17.1 percent, this display that the theoretical model of grinding tooth surface roughness has better precision. These provide a foundation for the control of grinding tooth quality of bevel gear.

**Key words:** bevel gear; NC grinding; surface roughness; model; analyze

收稿日期: 2009-02-16

项目基金: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2005CB724104), 湖南省高等学校科学研究基金资助项目(07C235)

作者简介: 明兴祖(1964-), 男, 湖南临澧人, 湖南工业大学教授, 主要从事数字化制造理论与技术方面的研究与教学,

E-mail: [mxz9036@126.com](mailto:mxz9036@126.com)

## 0 引言

螺旋锥齿轮是实现相交轴运动传递的基础元件,广泛应用于汽车、工程机械、航空航天、矿山、冶金、石油等工业领域,其精密加工方法一般为多轴数控磨削,但加工表面粗糙度对螺旋锥齿轮的配合精度、耐磨性、抗疲劳性、耐腐蚀性和传动性能等有重要影响。

在磨削表面粗糙度研究方面,国外学者 Rogelio<sup>[1]</sup>、Agarwal<sup>[2]</sup>等考虑了砂轮特性、加工材料特性、磨削状态和磨削用量等动态变化和相互影响因素,基于随机分布的切屑厚度,建立了外圆磨削表面粗糙度数学模型; Zhou<sup>[3]</sup>将砂轮的磨粒突起高度视为随机分布,根据砂轮上任一个磨粒的运动轨迹,同时考虑砂轮磨损,建立了平面磨削的表面粗糙度数学模型; Koshy<sup>[4]</sup>和 Aurich<sup>[5]</sup>分别以多面体和球体作为磨粒的基本形态,将其分布在平面上,构建了局部砂轮仿真模型。国内蔡光起等人<sup>[6]</sup>考虑了材料的塑性隆起变形对表面粗糙度的影响,基于砂轮表面磨粒与工件表面的几何创成机理,提出了计算平面磨削表面粗糙度数值的塑性影响系数及其理论修正公式;赵恒华等人<sup>[7]</sup>以正六面体作为磨粒的基本形态,并将该磨粒随机分布在砂轮基体上,建立虚拟砂轮的仿真物理模型以及磨粒与工件接触的数学模型,对平面磨削过程进行了动态仿真;吴序堂等人<sup>[8]</sup>采用变速展成原理的锥面砂轮等粗糙度磨齿法,研究了磨齿表面粗糙度。

以上研究磨削表面粗糙度的方法为分析法,另一种方法是经验法<sup>[9]</sup>。经验方法(主要有神经网络法、响应曲面法、磨粒静态集合处理和回归分析等)以加工试验为基础来建立表面粗糙度预测模型,这些因受具体试验条件的影响,在预测其它条件下的表面粗糙度时受到限制。

随着计算技术和切削技术的不断发展,采用分析法建立可靠、准确、通用的加工表面粗糙度理论和计算模型,揭示加工表面的创成机理,预测不同切削条件下的表面粗糙度,将是今后的发展趋势。

上述主要是对外圆柱面、平面、标准圆柱齿轮等简单零件磨削的表面粗糙度研究,对于复杂螺旋锥齿轮的磨削表面粗糙度研究目前还刚刚开始。本文以螺旋锥齿轮六轴五联动数控机床为研究对象,采用基于加工运动轨迹的理论分析方法,进行螺旋锥齿轮数控磨削表面粗糙度的建模及分析。

## 1 螺旋锥齿轮数控磨削原理与齿面数学模型

### 1.1 展成法数控磨削原理

螺旋锥齿轮全数控磨齿机一般取消了传统的摇台、偏心鼓轮、刀倾机构以及几乎所有的传动链,其

结构简图如图1所示。

图1中, $X$ 轴为主轴的水平直线运动轴, $Y$ 轴为主轴的垂直直线运动轴, $Z$ 轴为床鞍(工件轴线)的直线运动轴; $A$ 轴为工件主轴的回转运动轴, $B$ 轴为齿坯安装角的调整运动轴, $C$ 轴为主轴的旋转运动轴,加工时 $C$ 轴不参与联动。该结构用 $X$ 和 $Y$ 轴的联动来模拟摇台的转动,通过计算机可直接控制3个直线运动轴( $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ )和2个回转运动轴( $A$ 、 $B$ )作联动,以实现六轴五联动对螺旋锥齿轮的数控加工。

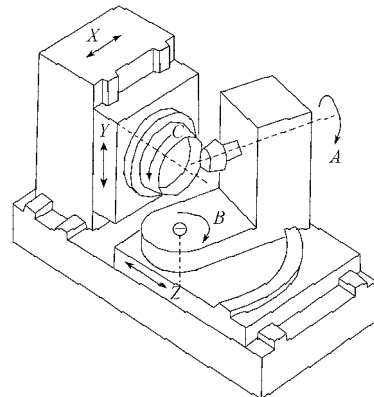


图1 数控磨齿机结构简图

Fig. 1 Structure sketch of NC grinding tooth machine

螺旋锥齿轮是按照“假想产形轮”切齿原理进行加工的,即通过假想产形轮与被切齿轮作无隙的啮合,代表产形轮轮齿的刀盘切削刃就在被切齿轮的轮坯上逐渐地切出齿形。磨削时一般采用展成法加工,大轮采用双面法,小轮则根据大轮采用单面法分别加工出小轮的凹、凸齿面<sup>[10]</sup>。本文主要研究单面法用直口杯砂轮展成磨削弧齿锥齿轮小轮的情况。

### 1.2 数控磨削的齿面数学模型

#### 1.2.1 小轮齿面加工坐标系的建立

展成法加工弧齿锥齿轮小轮时加工坐标系如图2。

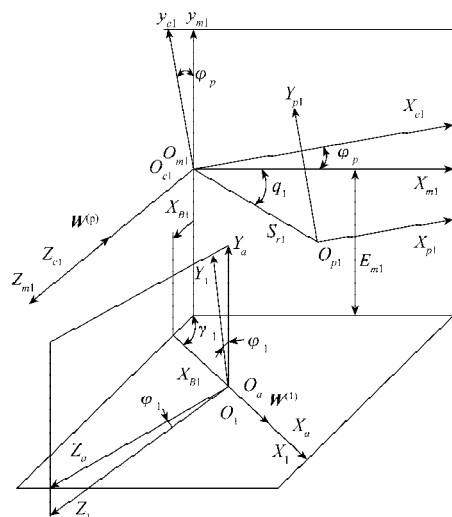


图2 小轮加工坐标系

Fig. 2 Pinion machining coordinate

图2中,  $S_{m1}$  固连于磨齿机, 为静坐标系, 其原点  $O_{m1}$  位于机床中心,  $O_{m1}X_{m1}Y_{m1}$  平面位于机床内并与摇台主轴垂直的平面内。 $S_{c1}$  固连于摇台, 在展成过程中  $S_{c1}$  绕坐标系  $S_{m1}$  的  $Z_{m1}$  坐标轴旋转, 在初始位置时  $S_{c1}$  与  $S_{m1}$  重合, 角  $\varphi_p$  为  $S_{c1}$  的当前转角。 $S_{p1}$  也固连于  $S_{c1}$  上, 并固连于刀盘安装平面, 原点  $O_{p1}$  位于刀盘中心,  $O_{p1}X_{p1}Y_{p1}$  平面位于刀尖平面内, 其中角  $q_1$  为角向刀位,  $S_{r1}$  为径向刀位。 $S_a$  为辅助坐标系, 用来描述被加工小轮在机床上的安装位置, 固连于  $S_{m1}$ ,  $X_a$  与  $X_{m1}$  成  $\gamma_1$  角 (小轮根锥角)。 $S_1$  固连于被加工小轮, 其原点  $O_1$  为被加工小轮的节锥顶点; 在展成过程中,  $S_1$  绕  $S_a$  的  $X_a$  轴旋转, 初始位置时  $S_1$  与  $S_a$  重合, 角  $\varphi_1$  为  $S_1$  的当前转角。 $X_{B1}$  为床位,  $X_{g1}$  为轴向轮位,  $E_{m1}$  为垂直轮位, 摇台旋转的角速度矢量为  $\boldsymbol{W}^{(p)}$ , 被加工小轮旋转的角速度矢量为  $\boldsymbol{W}^{(1)}$ 。

### 1.2.2 小轮刀具切削面的表示

小轮的刀具切削锥面如图3所示。

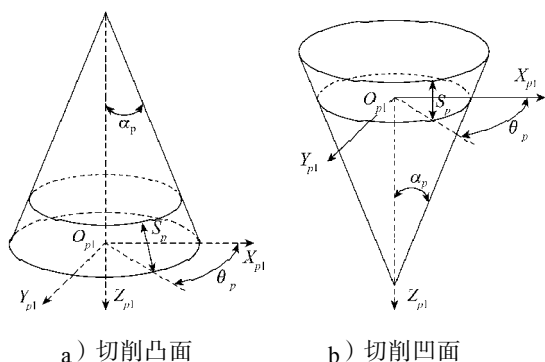


图3 小轮刀具切削锥面

Fig. 3 Cutter cone surface of pinion

小轮刀具切削面及其单位法线表示在  $S_{p1}$  中为

$$\boldsymbol{r}_{p1}(S_p, \theta_p) = \begin{bmatrix} (R_p + S_p \sin \alpha_p) \cos \theta_p \\ (R_p + S_p \sin \alpha_p) \sin \theta_p \\ -S_p \cos \alpha_p \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

$$\text{由 } \boldsymbol{n}_{p1} = \frac{\boldsymbol{N}_{p1}}{|\boldsymbol{N}_{p1}|},$$

$$\boldsymbol{N}_{p1} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{p1}(S_p, \theta_p)}{\partial S_p} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_{p1}(S_p, \theta_p)}{\partial \theta_p} \text{ 可得}^{[11]}$$

$$\boldsymbol{n}_{p1} = [\cos \alpha_p \cos \theta_p \quad \cos \alpha_p \sin \theta_p \quad \sin \alpha_p]^T, \quad (2)$$

式中:  $S_p$  和  $\theta_p$  为曲面坐标;

$\alpha_p$  为刀具齿形角, 对于内刀 (切削小轮的凸面) 取为负值, 对于外刀 (切削小轮凹面) 取为正值;

$R_p$  为小轮刀盘的刀尖半径,  $R_p = r_0 \pm W_1/2$ , 对外刀刃取“+”, 对内刀刃取“-”,  $r_0$  为刀盘名义直径,  $W_1$  为刀顶距。

刀具切削面及其单位法线表示在  $S_1$  中为

$$\boldsymbol{r}_1(S_p, \theta_p, \varphi_p) = \boldsymbol{M}_{1a} \boldsymbol{M}_{am1} \boldsymbol{M}_{m1c1} \boldsymbol{M}_{c1p1} \boldsymbol{r}_{p1}(S_p, \theta_p), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{n}_1(\theta_p, \varphi_p) = \boldsymbol{L}_{1a} \boldsymbol{L}_{am1} \boldsymbol{L}_{m1c1} \boldsymbol{L}_{c1p1} \boldsymbol{n}_{p1}, \quad (4)$$

上面各式中  $\boldsymbol{M}_{1a}$ 、 $\boldsymbol{M}_{am1}$ 、 $\boldsymbol{M}_{m1c1}$ 、 $\boldsymbol{M}_{c1p1}$  为坐标系之间的 Denavit-Hartenberg 齐次变换矩阵, 它们各自去掉最后一行和最后一列得到的矩阵分别为  $\boldsymbol{L}_{1a}$ 、 $\boldsymbol{L}_{am1}$ 、 $\boldsymbol{L}_{m1c1}$ 、 $\boldsymbol{L}_{c1p1}$ , 其中

$$\boldsymbol{M}_{1a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_{am1} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & 0 & \sin \gamma_1 & -X_{B1} \sin \gamma_1 - X_{g1} \\ 0 & 1 & 0 & E_{m1} \\ -\sin \gamma_1 & 0 & \cos \gamma_1 & -X_{B1} \cos \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_{m1c1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p & -\sin \varphi_p & 0 & 0 \\ \sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{M}_{c1p1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_{r1} \cos q_1 \\ 0 & 1 & 0 & S_{r1} \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

小轮展成加工过程中滚比  $i_{o1}$  恒定, 小轮转角  $\varphi_1$  和摇台角  $\varphi_p$  之间的关系为  $\varphi_1 = i_{o1} \varphi_p$ 。

### 1.2.3 小轮磨削啮合方程的建立

在磨齿机静坐标系  $S_{m1}$  中, 小轮加工过程中有啮合方程成立, 即

$$\boldsymbol{n}_{m1} \cdot \boldsymbol{v}_{m1}^{g1} = 0, \quad (5)$$

式中:  $\boldsymbol{n}_{m1}$  为刀具切削面在  $S_{m1}$  中的法线;

$\boldsymbol{v}_{m1}^{g1}$  为被加工小轮与产形轮在  $S_{m1}$  中切削点的相对运动速度, 有

$$\boldsymbol{n}_{m1}(\theta_p, \varphi_p) = \boldsymbol{L}_{m1c1} \boldsymbol{L}_{c1p1} \boldsymbol{n}_{p1}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{v}_{m1}^{g1} = (\boldsymbol{w}_{m1}^g - \boldsymbol{w}_{m1}^1) \times \boldsymbol{r}_{m1} - \boldsymbol{R}_{m1} \times \boldsymbol{w}_{m1}^1. \quad (7)$$

设  $|\boldsymbol{w}_{m1}^1| = 1$ , 则有

$$\boldsymbol{w}_{m1}^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/i_{o1} \end{bmatrix}^T, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{w}_{m1}^1 = [\cos \gamma_1 \quad \sin \gamma_1]^T, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{r}_{m1} = \boldsymbol{M}_{m1c1} \boldsymbol{M}_{c1p1} \boldsymbol{r}_{p1}(S_p, \theta_p), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{R}_{m1} = [X_{g1} \cos \gamma_1 - E_{m1} X_{B1} + X_{g1} \sin \gamma_1]^T. \quad (11)$$

将式(8)~(11)代入式(7), 然后将式(6)、(7)代入式(5), 即可消去参数  $S_p$ ; 将式(1)、(2)代入式(3)、(4), 则得在  $S_1$  中以  $\theta_p$  和  $\varphi_p$  为曲面参数的小轮齿面方程  $\boldsymbol{r}_1(\theta_p, \varphi_p)$  和法线方程  $\boldsymbol{n}_1(\theta_p, \varphi_p)$ 。

## 2 螺旋锥齿轮数控磨削表面粗糙度的形成机理及运动轨迹计算

### 2.1 磨削表面粗糙度的形成机理与影响因素

在用展成法磨削螺旋锥齿轮时,砂轮旋转形成的圆锥面代表假想产形轮的一个轮齿,齿槽的任一横截面,磨削都是从齿顶到齿根(或从齿根到齿顶)渐进地生成齿廓,由砂轮切削刃在不同位置包络而成,如图4中的a)所示。瞬时接触迹线为倾斜的一段,倾斜方向是一端朝大端齿根,另一端朝小端齿顶,并随着展成运动由小端向大端(或由大端向小端)沿纵向移动,齿轮节线方向(纵向)的点线为圆弧,如图4中的b)所示。

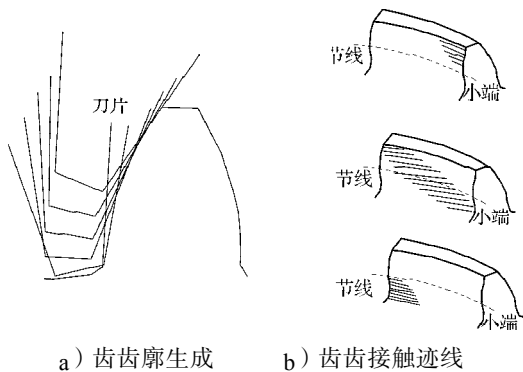


图4 磨齿齿廓生成与接触迹线

Fig. 4 Profile generation and contact line of grinding tooth

砂轮上随机分布且具有较大负前角的磨粒在齿面上经过滑擦、耕犁和成屑等过程来循环切除材料,通过力热交互作用使齿面表层产生弹性变形、塑性变形和热变形,从而创成出工件表面,形成齿面的微观几何形貌。磨削是一个动态和高度非线性的复杂过程,影响磨削表面粗糙度因素有磨削加工运动轨迹、磨削用量(砂轮速度 $v_s$ 、展成速度 $v_w$ 、磨削深度 $a$ )、砂轮特性与形貌、砂轮磨损与修整、磨削液、工件材料、工艺系统的刚度及其动态特性等。

### 2.2 数控磨削齿面的加工运动轨迹节点计算

以磨削接触迹线与螺旋锥齿轮磨削理论齿面的切点作为节点,该节点应满足磨削啮合方程。由于磨削是由经过齿面节点的有限个接触线段组成的,故需对齿面进行网格离散化<sup>[12]</sup>。

将齿面上加工运动轨迹所有离散点投影到一轴向剖面 $O_p X_p Y_p$ 上,齿面旋转投影图和网格节点如图5。

图5中, $O_p$ 为齿轮轴的节锥顶点,即交叉点 $O_1$ , $X_p$ 轴为回转轴线。设沿根锥的齿长方向和齿高方向划分网格为 $m \times n$ 格,其中沿齿高方向的网格线在齿长方向上的距离是均等的,而沿齿长方向的网格线与齿根线的夹角是不同的,最里端的网格线与齿根线重合,最外端的网线与齿顶线重合。

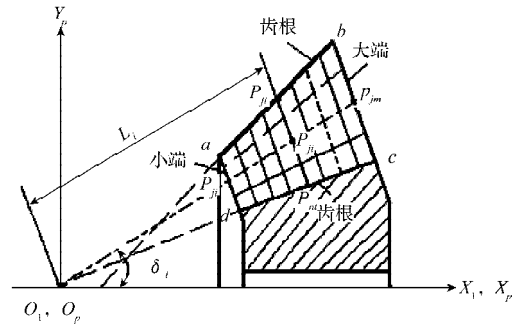


图5 小轮齿面旋转投影图和网格节点

Fig. 5 Tooth surface turning projection map and grid nodes of pinion

设网格节点 $P_{ji}$ 至 $O_1$ 的距离为 $L_i$ , $\overline{O_1 P_{ji}}$ 和旋转轴线 $O_1 X_p$ 的夹角为 $\delta_i$ 。齿轮的空间坐标系 $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ 与平面坐标系 $O_p X_p Y_p$ 的原点重合, $X_1$ 轴与 $X_p$ 重合,则齿面点 $P_{ji}$ 的坐标须满足以下条件:

$$\begin{cases} x_p = x_1 = L_i \cos \delta_i, \\ y_p = \sqrt{y_1^2 + z_1^2} = L_i \sin \delta_i. \end{cases} \quad (12)$$

对于齿面边界 $b$ 、 $c$ 、 $a$ 、 $d$ 4点在 $O X_p Y_p$ 的平面坐标值分别为:

$$\begin{cases} x_b = R_e \cos \delta - h_a \sin \delta, \\ y_b = R_e \sin \delta + h_a \cos \delta, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_c = R_e \cos \delta + h_f \sin \delta, \\ y_c = R_e \sin \delta - h_f \cos \delta, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x_a = x_b - \frac{b \cos \delta_a}{\cos(\delta_a - \delta)}, \\ y_a = y_b - \frac{b \sin \delta_a}{\cos(\delta_a - \delta)}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_d = x_c - \frac{b \cos \delta_f}{\cos(\delta - \delta_f)}, \\ y_d = y_c - \frac{b \sin \delta_f}{\cos(\delta - \delta_f)}. \end{cases} \quad (16)$$

上面式中: $R_e$ 为外锥距; $b$ 为齿面宽; $\delta_a$ 为面锥角; $\delta$ 为节锥角; $\delta_f$ 为根锥角; $h_{ea}$ 为齿顶高; $h_{ef}$ 为齿根高。

在 $O_p X_p Y_p$ 中,对于网格中节点 $P_{ji}$ 的坐标 $(x_{ji}, y_{ji})$ ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ),可求得

$$\begin{cases} x_{ji} = \frac{y_{li} - y_{j1} - C x_{li} + D x_{j1}}{D - C}, \\ y_{ji} = y_{j1} + D(x_{ji} - x_{j1}), \end{cases} \quad (17)$$

其中: $C = \frac{y_{ni} - y_{li}}{x_{ni} - x_{li}}$ ;  $D = \frac{y_{jm} - y_{j1}}{x_{jm} - x_{j1}}$ ;

$$x_{li} = x_a + \frac{i-1}{m-1}(x_b - x_a);$$

$$y_{li} = y_a + \frac{i-1}{m-1}(y_b - y_a);$$

$$x_{ni} = x_d + \frac{i-1}{m-1}(x_c - x_d);$$

$$y_{mi} = y_d + \frac{i-1}{m-1}(y_c - y_d);$$

$$x_{j1} = x_a + \frac{j-1}{n-1}(x_d - x_a);$$

$$y_{j1} = y_a + \frac{j-1}{n-1}(y_d - y_a);$$

$$x_{jm} = x_b + \frac{j-1}{n-1}(x_c - x_b);$$

$$y_{jm} = y_b + \frac{j-1}{n-1}(y_c - y_b)。$$

将式(13)~(16)代入式(17), 可计算节点 $P_{ji}$ 的坐标; 将 $P_{ji}$ 的坐标 $(x_{ji}, y_{ji})$ 分别代入式(12)中的 $x_p$ 、 $y_p$ , 通过与式(3)、(4)联立求解, 可得齿面上各节点的空间坐标值 $(x_1, y_1, z_1)$ 。

### 2.3 数控磨削接触迹线矢量计算

在刀盘坐标系 $S_{p1}$ 中, 设磨削时刀具和齿轮的啮合点为 $M$ 处, 沿小轮刀具刃母线方向的单位矢量表示为 $t_{p1}$ , 由式(1)可得

$$t_{p1} = \frac{\frac{\partial r_{p1}(S_p, \theta_p)}{\partial S_p}}{\left| \frac{\partial r_{p1}(S_p, \theta_p)}{\partial S_p} \right|} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_p \cos \theta_p \\ \sin \alpha_p \sin \theta_p \\ -\cos \alpha_p \end{bmatrix}。 \quad (18)$$

将 $t_{p1}$ 表示在齿轮的空间坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 中, 设为 $t_1$ , 根据式(4)同理可得

$$t_1(\theta_p, \varphi_p) = L_{1a}L_{am1}L_{m1c1}L_{c1p1}t_{p1}。 \quad (19)$$

由上面讨论知, 式(3)表示的 $r_1(\theta_p, \varphi_p)$ 就得到了小轮齿面 $M$ 点处的磨削接触迹线矢量, 式(4)表示的 $n_1(\theta_p, \varphi_p)$ 就为小轮齿面 $M$ 点处的法线方向, 式(19)表示的 $t_1(\theta_p, \varphi_p)$ 就为 $M$ 点处的一个切线方向(齿高方向), 而 $t_1(\theta_p, \varphi_p) \times n_1(\theta_p, \varphi_p)$ 就为 $M$ 点处的齿长方向。

## 3 磨削表面粗糙度计算模型

### 3.1 磨削理论残留面积高度

曲面磨削的刀位轨迹计算方法可选用参数线法, 即选择齿长参数线方向为磨削行的走刀方向, 齿高参数线方向为磨削行的行进给方向, 如图5中。沿齿长方向和齿高方向划分网格的疏密程度, 取决于磨齿精度和计算点的数目。如划分的网格数过少, 则会产生弦高误差, 影响加工质量; 如网格数过多, 则加工效率低, 计算量也大。

对于该磨齿来说, 由于在垂直于纹理方向(齿高方向)相对于平行于纹理方向上(齿长方向)的表面粗糙度数值较大, 因此, 一般是选择齿高方向的表面粗糙度作为其计算数值, 这样就磨削3D理论残留面积高度计算转化为在沿齿高方向各横截面上求磨

削2D理论残留面积高度问题。

#### 3.1.1 磨削2D理论残留面积高度计算

将齿轮坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 绕 $Z_1$ 逆时针旋转 $\gamma_1$ 角(小轮根锥角)后, 取沿齿高方向横向截面上的一个齿面, 则齿长方向为 $X_{1h}$ , 齿高方向为 $Y_{1h}$ , 法线方向为 $Z_{1h}$ , 如图6所示。

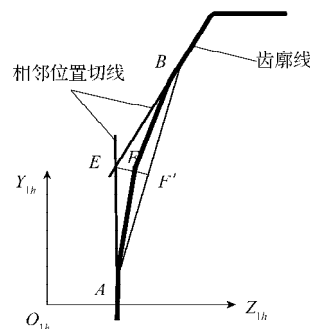


图6 2D理论残留面积高度

Fig. 6 Height of 2D theoretical residual area

在 $O_1X_{1h}Y_{1h}Z_{1h}$ 坐标系中, 设砂轮磨削的一个位置与齿廓线在 $A$ 点相切, 相邻的另一个磨削位置与齿廓线在 $B$ 点相切, 这2个位置的切线相交在 $E$ 点, 由 $E$ 点向齿廓线作法线, 交点为 $F$ , 则凸出的棱角 $AEBFA$ 称为残留面积,  $\overline{EF}$ 称为2D理论残留面积高度。由于插补步长为数控系统的脉冲当量, 一般很小, 在计算时可取 $\overline{AB}$ 线段的中点 $F'$ ,  $\overline{EF'}$ 作为2D理论残留面积高度的近似值 $H_f$ 。

坐标值 $(x_1, y_1, z_1)$ 与 $(x_{1h}, y_{1h}, z_{1h})$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix} x_{1h} \\ y_{1h} \\ z_{1h} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}。 \quad (20)$$

在图6中, 小轮齿面上磨削点 $A$ ( $B$ )处的切线 $\overline{AE}$ ( $\overline{BE}$ )方向即为 $A$ ( $B$ )点处的 $t_2$ 方向, 经式(12)求得 $A$ ( $B$ )点的 $(x_1, y_1, z_1)$ 后, 由式(20)可求得在 $O_1X_{1h}Y_{1h}Z_{1h}$ 坐标系中 $A$ 点坐标 $(x_a, y_a, z_a)$ 、 $B$ 点坐标 $(x_b, y_b, z_b)$ 。

在横向截面 $O_1X_{1h}Y_{1h}$ 中, 切线 $\overline{AE}$ 和 $\overline{BE}$ 的方程为

$$\begin{cases} \overline{AE}: y - y_a = t_{1a}(z - z_a), \\ \overline{BE}: y - y_b = t_{1b}(z - z_b), \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $t_{1a}$ 、 $t_{1b}$ 分别为 $A$ 、 $B$ 点处的磨削切线单位矢量。

则切线 $\overline{AE}$ 和 $\overline{BE}$ 的交点 $E(z_e, y_e)$ 为

$$\begin{cases} z_e = \frac{y_a - y_b + t_{1b}z_b - t_{1a}z_a}{t_{1b} - t_{1a}}, \\ y_e = y_b + t_{1b}(z_e - z_b), \end{cases} \quad (22)$$

弦 $\overline{AB}$ 的中点 $F'(z_{f'}, y_{f'})$ 为

$$\begin{cases} z_{f'} = \frac{z_b - z_a}{2}, \\ y_{f'} = \frac{y_b - y_a}{2}, \end{cases} \quad (23)$$

则2D理论残留面积高度 $H_{f'}$ 为

$$H_{f'} = \sqrt{(z_{f'} - z_e)^2 - (y_{f'} - y_e)^2}. \quad (24)$$

### 3.1.2 磨削3D理论残留面积高度计算

在图5中, 设第 $i$ 个横截面上第 $k$ 个磨削点与第 $k+1$ 个磨削点之间的2D理论残留面积高度为 $H_{ki}$ , 则齿面(凸面或凹面)上的3D理论残留面积高度 $H$ (按照式(24))应取齿面上的2D理论残留面积最大高度值, 即为

$$H = \max\{H_{ki}\}, i=1,2,\dots,m; k=1,2,\dots,n-1. \quad (25)$$

由式(22)~(25)得,  $H$ 受 $t_1(\theta_p, \varphi_p)$ 的影响, 而 $t_1$ 取决于 $\theta_p, \varphi_p$ 的变化, 则 $H$ 受砂轮角速度矢量 $\mathbf{W}^{(l)}$ ( $\theta_p$ 的变化)、展成运动中摇台旋转的角速度矢量 $\mathbf{W}^{(p)}$ ( $\varphi_p$ 的变化)、被加工小轮旋转的角速度矢量 $\mathbf{W}^{(1)}$ ( $\varphi_1 = i_{o1}\varphi_p$ 的变化)的影响。

### 3.2 磨削表面粗糙度

在上面的讨论中, 忽略磨削齿面材料的耕犁塑性变形, 即假定磨削过程是在磨刃纯切削状态下, 影响磨齿表面粗糙度的主要因素是理论残留面积高度 $H$ , 其由磨削齿面加工运动轨迹决定, 即受齿面几何尺寸和磨削用量的影响。此外, 影响磨削表面粗糙度的因素还有许多, 故在评定表面粗糙度时, 需对 $H$ 进行修正。工艺系统的刚度及其动态特性引起的磨床振动, 砂轮特性、磨粒磨损与修整、磨削液等磨削工艺条件, 均引起磨粒在齿面上的耕犁, 造成表面的塑性侧向隆起, 对表面粗糙度有一定影响。如图7所示,  $S_1, S_2$ 为隆起面积,  $S$ 为切削沟槽截面积, 由于表面存在塑性隆起现象, 增加了砂轮参加切削的有效磨刃, 使得轮廓峰与轮廓单峰总数增加, 而最高的谷底在极限情况下应发生在某个最高隆起点上, 从而使得最大谷底高度极值将变为 $H+h$ 。可将隆起面积和切削沟槽截面积按相似三角形处理, 得

$$h = H\sqrt{\xi/2} = H\sqrt{(1-\eta)/2}, \quad (26)$$

式中:  $\xi$ 为材料塑性隆起系数,  $\xi = \frac{S_1 + S_2}{S}$ ;

$\eta$ 为材料相对去除系数,

$$\eta = \frac{S - (S_1 + S_2)}{S} = 1 - \xi。$$

由图7, 修正后的最大谷底高度极值 $H_1$ 为

$$H_1 = H + h = KH. \quad (27)$$

式中, 磨齿表面粗糙度修正系数 $K = 1 + \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}$ 。在磨削20CrMnTi、20CrMo等齿轮材料时, 取 $K=1\sim 1.2$ ; 在材料塑性较大、磨粒切深较小和耕犁作用增加时,  $K$ 取

较大值。

轮廓表面最大谷底高度值 $H_1$ 与表面粗糙度轮廓算术值 $R_a$ 的关系有 $R_a = 0.256H_1^{[6]}$ , 由式(27)得磨齿表面粗糙度 $R_a$ 为

$$R_a = 0.256H_1 = 0.256KH. \quad (28)$$

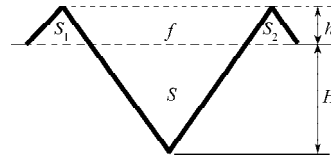


图7 磨刃切削沟槽横断面

Fig. 7 Cross section of the scratch in blade grinding

## 4 磨削表面粗糙度计算与试验分析

### 4.1 磨削表面粗糙度计算分析

在螺旋锥齿轮六轴五联动数控磨齿机上, 以单面法用直口杯砂轮展成磨削弧齿锥齿轮小轮为例, 其齿坯基本参数和磨削加工参数分别如表1、表2所示。小轮材料为20CrMoTi, 硬度为HRC58~HRC62。

表1 小轮齿坯基本参数

Table 1 Cross section of the scratch in blade grinding

参数名称	参数值	参数名称	参数值
齿数 $z_1$	15, 左旋	节锥角 $\delta_1$	18.060 5°
模数 $m$	8.22 mm	根锥角 $\delta_{f1}$	16.427 3°
节圆直径 $d_2$	123.3 mm	面锥角 $\delta_{a1}$	21.341 5°
螺旋角 $\beta$	35°	齿面宽 $b_1$	57.15 mm
压力角 $\alpha$	20°	齿根高 $h_{ef1}$	5.67 mm
外锥距 $R_c$	198.857 8 mm	齿顶高 $h_{ea1}$	9.85 mm
节锥距 $R$	170.282 8 mm		

表2 小轮磨削加工参数

Table 2 Grinding tooth parameters of pinion

参数名称	参数值	
	凹面	凸面
刀盘名义直径 $r_{d0}$ /mm	152.4	152.4
刀具齿形角 $\alpha_p$ /°	14	-31
轮坯安装角 $\gamma_1$ /°	358.209 4	355.592 1
径向刀位 $S_{r1}$ /mm	136.775	149.682
角向刀位 $q_1$ /°	61.916 7	54.533 6
床位 $X_{\theta 1}$ /mm	35.627 3	59.670 1
垂直轮位 $E_{01}$ /mm	-4.190 9	5.079
轴向轮位 $X_{s1}$ /mm	-6.630 9	9.796 7
滚比 $i_{o1}$	2.854 5	3.225 2

在计算时, 沿齿长方向和齿高方向的加工运动轨迹划分网格 $m \times n$ 分别取为 $9 \times 5$ 、 $11 \times 7$ 、 $13 \times 9$ 、 $15 \times 11$ 和 $18 \times 14$ 等5组, 根据式(28), 通过MATLAB软件, 可计算出小轮凹面(凸面)上的 $R_a$ 。

#### 4.1.1 齿轮展成速度对 $R_a$ 的影响

取磨削深度 $a$ 为0.02 mm、砂轮速度 $v_p$ 为20.3 m/s, 当大轮展成速度 $v_2$ 分别为6.5、4.9、2.5、2.3、1.7 m/min

时,经计算得到磨削凸面时 $R_a$ 值分别为0.508 5、0.483 7、0.439 6、0.434 3、0.394 4  $\mu\text{m}$ ,经拟合得到的 $R_a$ 与 $v_2$ 的分布曲线如图8所示。

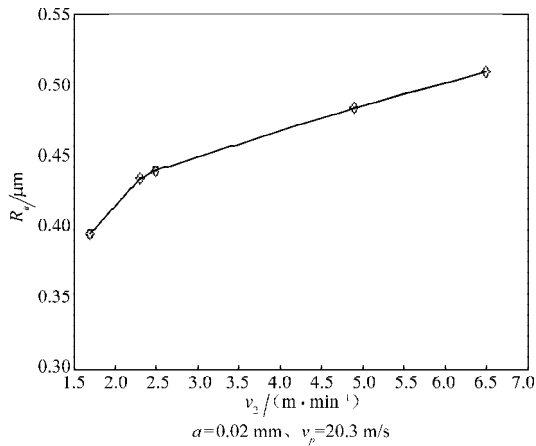


图8 凸面计算 $R_a$ 值与 $v_2$ 的分布曲线

Fig. 8 Distribution curve of convex  $R_a$  and  $v_2$  value

从图8知,随着 $v_2$ 提高, $R_a$ 值略有增加。这是由于大轮展成速度增加,使理论残留面积高度 $H$ 值略有增加;另外,随着展成角速度的提高,机床振动对粗糙度也有一定的影响。故可在 $R_a$ 变化不大的情况下,通过适当提高展成速度来提高磨削效率。

#### 4.1.2 砂轮速度对 $R_a$ 的影响

取磨削深度 $a$ 为0.02 mm、展成速度 $v_2$ 为3.6 m/min,当砂轮速度 $v_p$ 分别为52.6、35.2、26.5、21.0、16.5 m/s时,经计算得到磨削凹面时 $R_a$ 值分别为0.320 4、0.406 5、0.467 7、0.494 0、0.580 5  $\mu\text{m}$ ,经拟合得到的 $R_a$ 与 $v_p$ 的分布曲线如图9所示。

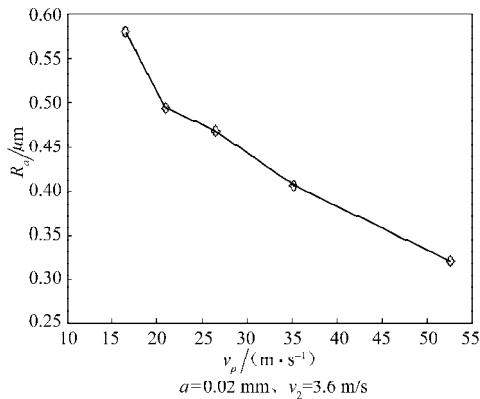


图9 凹面计算 $R_a$ 值与 $v_p$ 的分布曲线

Fig. 9 Distribution curve of concave  $R_a$  and  $v_p$  value

从图9可看出,随着 $v_p$ 提高, $R_a$ 可明显降低。这是因为提高砂轮速度后,每颗磨粒切下的磨屑变薄,磨粒在工件表面上产生的理论残留面积高度 $H$ 变小;另外,砂轮速度的提高,有利于磨屑的形成,磨削表面因塑性侧向隆起的高度也会变小。因此,砂轮速度提高后,既可提高磨削效率,又可减少 $R_a$ 值。

## 4.2 磨削表面粗糙度的试验验证与分析

### 4.2.1 磨削表面粗糙度的试验验证

磨削小轮时用PHOENIX450PG磨齿机,砂轮用SG60-JV,采用水基合成磨削液,磨削加工参数如表2。磨削后用德国生产的表面轮廓仪Hommel Werke T8000(精度为0.001  $\mu\text{m}$ )对表面粗糙度进行测量。试验中测定的粗糙度参数为 $R_a$ ,取样长度为0.8 mm,评定长度为取样长度的6倍,对齿轮凹面和凸面 $R_a$ 分别测量3次,取其平均值作为试验的表面粗糙度实测值。当磨削深度 $a$ 为0.02 mm时,磨削凹面与凸面在不同磨削用量下的 $R_a$ 实测值与计算值比较结果如表3。

表3 表面粗糙度实测值及其相对误差

Table 3 Test value and its relative error of surface roughness

齿面	磨削用量		$R_a$ 实测值 / $\mu\text{m}$	与计算值的最大相对误差 / %
	$v_p / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$v_2 / (\text{m} \cdot \text{min}^{-1})$		
凹面	52.6		0.358	-10.5
	35.2		0.445	-8.7
	26.5	3.6	0.524	-10.7
	21.0		0.561	-11.9
	16.5		0.633	-8.3
凸面		1.7	0.445	-11.4
		2.3	0.524	-17.1
	20.3	2.5	0.529	-16.9
		4.9	0.576	-16.0
		6.5	0.602	-15.5

$R_a$ 实测值与计算值相对误差最大绝对值为17.1%,此误差不大,说明磨齿表面粗糙度的理论计算模型较为精确。

### 4.2.2 磨削深度 $a$ 及其它因素对 $R_a$ 结果的试验分析

在 $v_p=20.3 \text{ m/s}$ 、 $v_2=2.3 \text{ m/min}$ ,磨削深度 $a$ 分别为0.02、0.05、0.08、0.11 mm时,经实测得到磨削小轮凸面时 $R_a$ 与 $a$ 的分布曲线如图10所示。

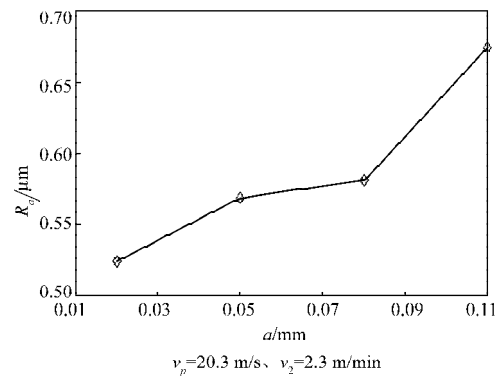


图10 凸面实测 $R_a$ 值与 $a$ 的分布曲线

Fig. 10 Distribution curve of convex test  $R_a$  value and  $a$

从图10中得出,当 $a < 0.1 \text{ mm}$ 时, $R_a$ 值随 $a$ 的提高略有增加;但当 $a > 0.1 \text{ mm}$ 时, $R_a$ 增加显著。这是由于大的 $a$ 会使单颗磨粒未变形磨削厚度增大,造成理论

残留面积高度  $H$  变大,同时磨粒钝化加剧,磨削力增大,磨削温度迅速升高,引起材料塑性隆起增加。这说明在磨粒没有钝化的正常磨削阶段,可适当增大  $a$  来提高磨削效率,而  $R_a$  变化不大。

通过试验还发现,磨粒粒度、砂轮磨损、磨削液、工件材料等对  $R_a$  均有不同程度的影响。随着磨粒粒度的增加,  $R_a$  逐渐减小,较细的磨粒会使粗糙度变化趋于平缓;砂轮磨损后,磨粒钝化加剧,对  $R_a$  的影响较大。因此,当磨粒粒度较大或磨粒钝化后,需要精细修整来减少  $R_a$ 。在选择磨削液时,可综合考虑其对磨削过程的冷却、润滑、清洗等作用,采用专用磨削液(如水基合成磨削液),以改善磨齿表面粗糙度。

## 5 结语

1) 根据螺旋锥齿轮的展成法数控磨削原理,通过小轮齿面加工坐标系的建立、小轮刀具切削面的表示和小轮磨削啮合方程的建立,得到齿面数学模型。

2) 分析了单面法用直口杯砂轮展成螺旋锥齿轮时表面粗糙度的形成机理与影响因素;通过网格划分,计算了数控磨削齿面的节点和接触迹线矢量;基于加工运动轨迹的分析方法,由沿齿高方向各横截面上 2D 理论残留面积高度,得到 3D 理论残留面积高度,并考虑齿面材料的耕犁塑性变形,得到磨削表面粗糙度的计算模型。

3) 通过弧齿锥齿轮小轮磨削表面粗糙度  $R_a$  值的计算表明,齿轮展成速度增大时,  $R_a$  值略有增加;砂轮速度提高时,  $R_a$  值可明显降低;通过试验验证分析的结果得出,当  $a$  小于 0.1 mm 时,  $R_a$  值随  $a$  的提高略有增加;当磨削深度  $a$  大于 0.1 mm 时,  $R_a$  增加显著;  $R_a$  实测值与计算值的相对误差最大绝对值为 17.1%,说明磨削表面粗糙度的计算模型与试验结果较相吻合。各种因素对  $R_a$  也有不同程度的影响,需对磨削工艺进行优化控制。

### 参考文献:

- [1] Rogelio L H, Steven Y L. Predictive Modeling of Surface Roughness in Grinding[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2003, 43: 755-761.
- [2] Agarwal S, Rao P V. A Probabilistic Approach to Predicting Surface Roughness in Ceramic Grinding[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2005, 45: 609-616.
- [3] Zhou X, Xi F. Modeling and Predicting Surface Roughness of the Grinding Process[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2002, 42(7): 969-977.
- [4] Koshy P, Jian V K, Lai G K. Stochastic Simulation Approach to Modelling Diamond Wheel Topography[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1997, 37(6): 751-761.
- [5] Aurich J C, Braun O, Warnecke G. Development of a Superabrasive Grinding Wheel with Defined Grain Structure by Using Kinematic Simulation[J]. CIRP Analysis Manufacturing Technology, 2003, 52(1): 275-280.
- [6] 修世超,李长河,蔡光起.磨削加工表面粗糙度理论模型修正方法[J].东北大学学报:自然科学版,2005,26(8): 770-773.
- [7] Xiu Shichao, Li Changhe, Cai Guangqi. Modification for Theoretical Model of Ground Surface Roughness[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2005, 26(8): 770-773.
- [8] 宿崇,杨建宇,赵恒华,等.虚拟砂轮的开发及其磨削性能分析[J].计算机辅助设计与图形学学报,2008,20(5): 560-564.
- [9] Su Chong, Yang Jianyu, Zhao Henghua, et al. Development of Virtual Grinding Wheel and Its Grinding Performance Analysis[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(5): 560-564.
- [10] 毛世民,吴序堂,聂钢.锥面砂轮磨齿机的等粗糙度磨削法[J].工具技术,1998,32(6): 13-15.
- [11] Mao Shimin, Wu Xutang, Nie Gang. The Equal TSR Grinding Method on Gear Grinding Machines with Conical Wheels[J]. Tool Engineering, 1998, 32(6): 13-15.
- [12] 苏宇,何宁,武凯,等.基于ANFIS的铝合金铣削加工表面粗糙度预测模型研究[J].中国机械工程,2005,16(6): 23-25.
- [13] Su Yu, He Ning, Wu Kai, et al. Prediction of Surface Roughness of Milling Aluminium Alloy Based on ANFIS[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(6): 23-25.
- [14] 曾韬.螺旋锥齿轮设计与加工[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.
- [15] Zeng Tao. Spiral Bevel Gear Design and Manufacture[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989.
- [16] Argyris J, Fuentes A, Litivin F L. Computerized Integrated Approach for Design and Stress Analysis of Spiral Bevel Gears [J]. Comput. Methods Appl. Mach. Engr., 2002, 191: 1057-1095.
- [17] Francesca D P, Marco G, Massimo G. Alternative Formulation of the Theory of Gearing[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40: 613-637.

(责任编辑:张亦静)