执行价格为行业平均期权定价模型

陈　超[1]，张艳辉[2]

（1. 浙江万里学院 商学院，浙江 宁波 315100；2. 河北工业大学 理学院，天津 300401）

摘　要：介绍了一种新型期权定价模型——执行价格为行业平均期权定价模型，用于经理薪酬制度。该模型以行业作为区分，以同行业的发展状况作为行业内各公司业绩比较的标准。采用此定价模型，可以在一定范围内较公平地衡量经理的经营水平。

关键词：行业平均；经理激励；期权定价

中图分类号：F830.9　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)01-0100-03

Option Pricing of Industry's Average Model for Exercise Price

Chen Chao[1]，Zhang Yanhui[2]

（1. School of Business，Zhejiang Wanli University，Ningbo Zhejiang 315100，China；
2. School of Science，Heibei University of Technology，Tianjin 300401，China）

Abstract：A new type of option pricing model which is the industry's average for the exercise price in system of managers salary is described. Based on industries' distinction, this model carries a standard of the other enterprises' performance comparison in the same industry according to its present development condition. Adopting this pricing model, it can be more equitable to measure the performance of managers in a certain range.

Key words：industry's average；executive incentive；option pricing

1　问题提出

股票期权制度源于企业竞争最激烈的美国。股票期权激励开始主要是面向公司经理层人员，所以也叫经理股票期权，是指公司向经理赠与期权持有人在未来一定期限内以事先确定的价格购买一定数量的本公司股票的权利。股票期权的最终价值是公司未来收益的体现，取决于公司股票的市场价格与期权行权价格之间的差异。

股票期权作为一种长期、灵活、极富激励效应的制度，成为经理激励的主流，它把经理个人利益与企业利益结合起来，把经理报酬与公司的经营业绩紧密挂钩，激励经理从公司长远发展进行经营决策，从而有利于企业的稳定发展。

由于经理股票期权具有不可交易性和授予期内不能行权的特性，财务会计准则委员会（FASB）提出了第123号准则——《基于股票的报酬之会计处理》，分别利用调整后的B-S模型和二叉树模型对经理股票期权进行定价。Hull.J和White.A[1-3]在此基础上提出了改进模型，但这些模型都建立在常数波动率的假设下，而大量的实证表明波动率具有变和聚类等性质。

李智、黄荣垣[4]引入亚式期权后，建立了GJR-GARCH亚式期权模型。殷仲民、黎永亮[5]指出，在我国，对经理股票期权激励决策应该由董事会以外与经理无利害关系的第三方来完成。党开宇、吴冲锋[6]采用平均价格期权研究经理激励机制，该模型以时期价格替代时点价格，不仅增加了经理操纵股票价格的难度，抑制了操纵股票价格的行为动机，而且在熊市情况下能适当调节经理的期权收入。但是，当期权授予后，股市持续萎靡，即使采用平均价格期权，经理仍

收稿日期：2008-12-24
作者简介：陈　超（1967-），男，江苏宿迁人，浙江万里学院副教授，金融学博士后，主要研究方向为金融衍生产品定价，
E-mail：chenchao1967@hotmail.com

不能获得期权收入，期权激励的效果受到影响。刘国买[7]采用双障碍期权研究经理激励机制。将股票价格变化拟定在一个区间内，即当股票价格超过设定的上限时，经理只能获得公司规定的固定收入；当股票价格低于设定的下限时，给予经理规定的最低补偿。该模型能遏制经理操纵股价行为和在熊市状态为经理提供保险，有利于调动经理努力工作的积极性。但是，当下障碍价格低于平价期权的执行价格时，经理仍能够获得股价触及下障碍价格的期权收入，可能诱导经理不努力的动机。郑晓玲[8]采用相对业绩比较期权研究经理激励机制。搜索一个与样本公司具有相关性的资产，通过相关资产相对业绩比较，剔除系统性风险对公司股票价格的影响，即使在股价下跌或没有多大升值的情况下，只要这种现象是系统性因素造成的，那么，经理仍有可能获得较高的期权价值。两资产相关系数的范围为[0，1]。若相关系数为 0，说明样本股票价格变化与相对业绩指标变化没有共同的外生随机因素，但不能断定样本股票价格变化仅受经理努力的影响，可能是相对业绩指标的选择不当，故，业绩比较参照对象的选择不当会影响经理期权激励的效果。

纵观已有的期权定价模型，在股价下跌、股市持续萎靡、经济整体急剧下滑或业绩比较参照对象选择不恰当时，都会影响经理期权激励的效果。而且，不同行业间的企业进行业绩比较，由于各行业的发展状况不相同，若用统一的标准进行衡量，这样对经理有失公平。

2　行业平均期权模型

基于上述原因，本文在相关研究的基础上，介绍一种新型期权模型——行业几何平均期权模型，用于经理薪酬制度。该模型以行业作为区分，以同行业所有公司的股票的几何平均值代替固定值作为期权执行价格，以同行业的发展状况作为行业内各公司业绩比较的标准（“同行业”就是处于相同竞争环境的所有企业）。这样可以在一定范围内较公平地衡量经理的努力水平。

在该模型中，假设$[0，t]$时间内同行业所有公司股票价格的几何平均值为 G，$G=\exp\left\{\frac{1}{t}\int_0^T \ln S_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$，其中，$S_1(\tau)$为同行业所有公司股票价格在 τ 时刻的几何平均。股票期权的终期收益为样本公司股票价格 S 与同行业所有公司的股票的几何平均 G 做差值，即$(S-G)^+$。

3　基本假设

设样本公司股票价格 S 和资产价格 S_1 分别满足下面的随机微分方程：

$$\mathrm{d}S(t)=\mu S(t)\mathrm{d}t+\sigma S(t)\mathrm{d}W(t), \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_1(t)=\mu_1 S_1(t)\mathrm{d}t+\sigma_1 S_1(t)\mathrm{d}W_1(t), \tag{2}$$

式中：$S_1(t)$为同行业所有公司股票价格在 t 时刻的几何平均；

μ,σ和μ_1,σ_1 分别是 S，S_1 预期收益率和波动率；

$\mathrm{d}W$，$\mathrm{d}W_1$ 为标准布朗运动。

定义两标资产相关系数为ρ（$0\le\rho\le1$）。据 Itô 定理得：$\mathrm{d}W(t)\,\mathrm{d}W_1(t)=\rho\mathrm{d}t$，

$\mathrm{d}S(t)\,\mathrm{d}S_1(t)=\sigma\sigma_1 SS_1\mathrm{d}W(t)\,\mathrm{d}W_1(t)$，

则 $\mathrm{d}S(t)\,\mathrm{d}S_1(t)=\sigma\sigma_1 SS_1\rho\mathrm{d}t$。

令路径因子$I(t)=\int_0^t \ln S_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，则$G(t)=\exp\left\{\frac{1}{t}I(t)\right\}$。

令 V 是决定于资产价格 S、S_1 及路径因子 I 和时间 t 的执行价格为行业平均的期权，即 $V(S，S_1，I，t)$。

4　模型求解

结合文献[9,10]，执行价格为行业几何平均期权定价模型满足如下方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\ln S_1\frac{\partial V}{\partial I}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}+$$
$$\sigma\sigma_1SS_1\rho\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial S_1}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+rS_1\frac{\partial V}{\partial S_1}-rV=0, \tag{3}$$

以及边界条件$(S-G(t))^+$，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\ln S_1\dfrac{\partial V}{\partial I}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}+\\ \quad\sigma\sigma_1SS_1\rho\dfrac{\partial^2 V}{\partial S\partial S_1}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}+rS_1\dfrac{\partial V}{\partial S_1}-rV=0, \\ V(S,t)=(S-G(t))^+。\end{cases} \tag{4}$$

令：$Z=y+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{(T-t)^2}{2T}$，

$Z_1=y_1+\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\frac{(T-t)^2}{2T}$，

$y=\frac{T-t}{T}\ln S$，$y_1=\frac{I}{T}+\frac{T-t}{T}\ln S_1$，

$V(S,S_1,I,t)=e^{-r(T-t)}W(Z,Z_1,t)$，

式（3）化为：
$$\frac{(T-t)^2}{T^2}\left[\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}-\sigma\sigma_1\rho\frac{\partial^2 W}{\partial Z\partial Z_1}+\frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 W}{\partial Z_1^2}\right]+\frac{\partial W}{\partial t}=0, \tag{5}$$

式（5）的边界条件为：$W(Z_1,T)=\left(S-e^{Z_1}\right)^+$，

令：$\tau=\frac{(T-t)^3}{3T^2}$，$x=\exp\left\{Z-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\}$，

$x_1=\exp\left\{Z_1-\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\tau\right\}$，

$W(Z,Z_1,\tau)=e^{[illegible]}F(x,x_1,\tau)$。

式（5）转化为古典的二维扩散方程：

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\sigma\sigma_1 x x_1\rho\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x_1}+ rx\frac{\partial F}{\partial x}+rx_1\frac{\partial F}{\partial x_1}-rF=0, \tag{6}$$

式（6）的边界条件为：$F(x_1,0)=(S-x_1)^+$，即

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+ \sigma\sigma_1 x x_1\rho\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x_1}+rx\frac{\partial F}{\partial x}-rx_1\frac{\partial F}{\partial x_1}-rF=0, \\ F(x_1,0)=(S-x_1)^+ .\end{cases} \tag{7}$$

根据标准B-S公式及文献[11]，得式（7）的解为：

$$F(x_1,\tau)=SN(d_1)-x_1 e^{-r\tau}N(d_2), \tag{8}$$

其中：

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{x_1}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma'^2\right)\tau}{\sigma'\sqrt{\tau}};\ d_2=d_1-\sigma'\sqrt{\tau};$$

$$\sigma'=\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2-2\rho\sigma\sigma_1} .$$

因此，执行价格为行业几何平均期权的解为：

$$V(S,S_1,I,t)=SN(\hat{d}_1)-\hat{S}_1 e^{-r\tau}N(\hat{d}_2),$$

其中：
$$\hat{d}_1=\frac{\ln\frac{S}{\hat{S}_1}-\left(r+\frac{1}{2}\hat{\sigma}'^2\right)(T-t)}{\hat{\sigma}'\sqrt{T-t}};$$

$$\hat{d}_2=\hat{d}_1-\hat{\sigma}'\sqrt{T-t};\ \tau=\frac{(T-t)^3}{3T^2};$$

$$\hat{\sigma}'=\frac{T-t}{T}\sqrt{\frac{\left(\hat{\sigma}^2+\hat{\sigma}_1^2-2\rho\hat{\sigma}\hat{\sigma}_1\right)}{3}};$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\cdot\frac{T-t}{T};\ \hat{\sigma}_1=\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{T-t}{T};$$

$$\hat{S}_1=S_1^{\frac{t}{T}}\exp\left\{\frac{t}{T}-\frac{r(T-t)}{2T}-\frac{\sigma^2(T-t)}{4T}+\frac{\sigma_1^2(T-t)^2}{6T^2}\right\}.$$

5 结语

本文在已有的期权定价模型用于经理薪酬制度的基础上，提出了执行价格为行业几何平均的期权定价模型，对经理的激励考虑了行业发展状况，体现了公平合理的原则。

总之，该模型用于经理激励，其自身具有一定优势，对于股票期权激励机制的研究有一定的意义，是经理薪酬制度的补充和完善。

参考文献：

[1] Hull J，White A. Determining the Value of Employee Stock Options[R]. Ontario：Report Production for the Ontario Teachers Pension Plan，2002.

[2] Hull J，White A. How to Value Employee Stock Options[Z]. Toronto：Working Paper，University of Toronto，2003.

[3] Hull J，White A. How to Value Employee Stock Options[J]. Financial Analysis Journal，2004，60(1)：114-119.

[4] 李 智，黄荣垣. GARCH框架下经理股票期权的定价[J]. 中国管理科学，2004，12(T)：233-235.
Li Zhi，Huang Rongyuan. Execuive Stock Option Pricing under GARCH[J]. China Management Science，2004，12(T)：233-235.

[5] 殷仲民，黎永亮. 股票期权机理的若干问题解析[J]. 西安电子科技大学学报：社会科学版，2001，11(2)：25-27.
Yin Zhongmin，Li Yongliang. On Analysis of Some Problems in Stock-Option Motivation[J]. Journal of Xidian University：Social Sciences Edition，2001，11(2)：25-27.

[6] 党开宇，吴冲锋. 亚式期权定价及其在期股激励上的应用[J]. 系统工程，2000，18(2)：27-32.
Dang Kaiyu，Wu Chongfeng. The Pricing of Asian Options and It's Application on Stock Option Stimulation[J]. Systems Engineering，2000，18(2)：27-32.

[7] 刘国买. 经理股票期权激励的定量研究[D]. 长沙：中南大学，2003.
Liu Guomai. Quantitative Research on the Incentive Mechanism of Executive Stock Option[D]. Changsha：Central South University，2003.

[8] 郑晓玲. 指数化股票期权激励及其在我国应用性分析[J]. 审计与经济研究，2008，23(3)：105-108.
Zheng Xiaoling. Indexed Incentive Stock Option and Its Application in China[J]. Audit & Economy Research，2008，23(3)：105-108.

[9] 叶中行，林建忠. 数理金融——资产定价与金融决策理论[M]. 北京：科学出版社，2005.
Ye Zhongxing，Lin jianzhong. Mathematical Finance-Asset Pricing and Financial Decision-Making Theory[M]. Beijing：Science Press，2005.

[10] 彭 斌. 期权新型定价与应用研究[D]. 南京：南京理工大学，2005.
Peng Bin. Research on Option Exotic Pricing and Application [D]. Nanjing：Nanjing University of Science and Technology，2005.

[11] Stulz R M. Options on the Minimum or Maximum of Two Risky Assets：Analysis and Applications[J]. Journal of Financial Economics，1982(10)：161-185.

（责任编辑：张亦静）