

可扩展的囚禁离子系统多量子比特 W 态的制备方案

蔡建武

(湖南工业大学, 湖南 株洲 412007)

摘要: 提出了一个囚禁离子系统多量子比特 W 态的制备方案, 当囚禁离子系统所有离子的内态处于基态、集体振动模处于单声子态时, 利用囚禁离子系统与激光场之间的相互作用即可制备多比特的 W 态。本方案只需要单束激光作用于囚禁离子系统, 而不需要对单个离子进行操纵, 制备 W 态的时间随离子数的增加而减少, 具有简单易行且可扩展的优点。

关键词: 囚禁离子; N 量子比特; W 态制备; 可扩展性

中图分类号: O413

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2009)01-0040-03

Scalable Scheme for Generating Multi-Qubit W State in Trapped-Ion System

Cai Jianwu

(Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A simple and scalable scheme is proposed to generate an n -qubit W state in trapped ions system. The n -qubit W state can be generated by interaction between ions and the laser field if the collective mode is initially prepared in the single-phonon state and all the ions are in ground states. The scheme only requires a single laser and laser manipulation of individual ion can be avoided. The required time to complete the process decreases with the number of ions.

Key words: trapped ions; N -qubit; W state preparation; scalability

0 引言

量子纠缠是量子力学最重要的特征之一, 它不仅为验证量子力学理论提供了可能性^[1], 而且在量子信息处理中有广泛的应用^[2,3]。在过去的 10 年中, 研究人员已经提出了很多不同纠缠态的制备方案^[4-7]。最近, 多体系统的纠缠引起了人们的广泛兴趣, 比如说 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态^[1,8]。而 Dür 等人也证明存在着另外一种三体纠缠 W 态^[9], 可用 $W = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ 描述。 W 态有些非常有趣的特征, 例如, 利用求迹的方法去掉其中任一粒子, 仍可保持剩余的二体之间的纠缠。因此, W 态的纠缠比 GHZ 态的更加稳定, 它和 GHZ 态一样在量子信息处理中也有广泛的应用^[10]。

最近在实验中观测到了三光子极化纠缠 W 态^[11]和囚禁离子系统的三粒子 W 态^[12]; 同时, 人们也在探索如何制备腔 QED 系统的 W 态^[13-18]。文献[12]提出的方案中, 要求原子和腔场的耦合强度远远小于原子跃迁频率与腔模频率之间的失谐量, 因此操作速度受到了限制; 文献[13]提出的制备三原子 W 态的方案中, 要求原子相继与腔相互作用, 且各自的作用时间不同, 这对实验实现提出了挑战; 文献[15]是利用绝热通道在无退相干的子空间中制备 W 态; 文献[16]中提出了一个可扩展的多原子的 W 态的方案, 同时此方案也可用于囚禁离子系统, 但此方案要求 2 束不同的激光, 而且要求对单个离子的操纵, 此外方案中要求一个离子处于激发态, 其它离子处于基态。本文提出制备多离子系统 W 态的另一个方案, 本方案具有如下特点: 1) 只需要单个共振相互作用, 操作时间短, 不需要对单

收稿日期: 2008-12-22

基金项目: 湖南省教育厅基金资助项目 (06C080)

作者简介: 蔡建武 (1963-), 男, 湖南长沙人, 湖南工业大学教授, 博士, 主要研究方向为量子信息和量子计算,

E-mail: jwcai@126.com

个离子的操纵; 2) 可以扩展到任意多个离子系统; 3) 操纵时间随离子数的增加而减少。

1 系统模型

考虑 N 个二能级离子囚禁在线性 Paul 阱中, 离子沿 Z 方向运动, 用一束激光同时均匀地照射在每个离子上, 系统的哈密顿量可以写作

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (1)$$

式中:

$$H_0 = \nu a^\dagger a + \omega_0 \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_{z,j}}{2} + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \nu_\lambda b_\lambda^\dagger b_\lambda, \quad (2)$$

$$H_{int} = \Omega \sum_{j=1}^N e^{i(\phi_j - \nu z_j - \omega_0 t)} \sigma_j^+ + H.c. \quad (3)$$

式中: 算符 $a(a^\dagger)$ 和 $b_\lambda(b_\lambda^\dagger)$ 是频率为 ν 的质心模及其它 $n-1$ 个频率为 ν_λ 的振动模的湮灭 (产生) 算符;

算符 $\sigma_{j,j} = |e\rangle_j \langle e| - |g\rangle_j \langle g|$,

$$\sigma_{j,j}^+ = |e\rangle_j \langle e| - |g\rangle_j \langle g|, \quad \sigma_j^+ = |e\rangle_j \langle g| \left(\sigma_j^- = |g\rangle_j \langle e| \right),$$

而 $|e\rangle_j$ 和 $|g\rangle_j$ 分别是第 j 个离子的激发态和基态;

ω_0 是 $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的跃迁频率;

k 是波矢;

z_j 是第 j 个离子相对于平衡位置的坐标;

Ω 和 ϕ 是激光的拉比频率和相对相位。

可以假定: 给定本征频率 $\nu_j = \sqrt{3}\nu$, 对应于呼吸模, 只有质心模被激发, 其它的频率 ($\geq \sqrt{29/5}\nu$) 取决于离子数, 且在文献[18]中有详细的计算, 同时还假定 $\phi = \frac{\pi}{2}$, 于是哈密顿量可写成

$$H = \omega_c \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_{z,j}}{2} + \nu a^\dagger a - i\Omega \sum_{j=1}^N \sigma_j^+ e^{i(\phi_j - \nu z_j - \omega_0 t)} + H.c., \quad (4)$$

考虑可分辨边带区域, 振动频率 ν 比其它特征频率要高得多。在此情况下, 快速振荡项可以忽略, 激光与离子的相互作用项可以用非线性 Jaynes-Cummings 模型^[19,20]来处理, 因此系统的哈密顿量又可写为

$$H = -i\Omega e^{-i\eta} \sum_{j=1}^N \sigma_j^- \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{2l+1}}{l!(l+1)!} a^\dagger a^{l+1} + H.c. \quad (5)$$

在 Lamb-Dicke 区域内, 式 (5) 中的哈密顿量展开后精确到 η 的一次项可得^[16,21]

$$H = \Omega \eta \sum_{j=1}^N (a \sigma_j^- + a \sigma_j^+) = g \sum_{j=1}^N (a \sigma_j^- + a \sigma_j^+), \quad (6)$$

式中 $g = \Omega \eta$ 。

2 W 态的制备

假定系统初态处于

$$|\Psi(0)\rangle = |1g_1g_2 \cdots g_n\rangle, \quad (7)$$

$|\cdots\rangle$ 中的 “1” 表示振动模的第一激发态。定义激发数

$$\text{算符 } N_e = \sum_{j=1}^n |e\rangle_j \langle e| + a^\dagger a, \quad (8)$$

不难知道它与系统哈密顿量对易, 因此, 在系统的演化过程中, 激发数算符守恒; 此外, 由于所有离子有相同的耦合强度, 因此是对称的。

$$\text{定义 } \phi_1 = |1g_1g_2 \cdots g_n\rangle, \quad (9)$$

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{1}{n}} (|0e_1g_2 \cdots g_n\rangle + |0g_1e_2 \cdots g_n\rangle + \cdots + |0g_1g_2 \cdots g_{n-1}e_n\rangle). \quad (10)$$

既然初态有激发数 1, 在演化过程中, 系统将处在由 $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ 张成的子空间中, 在此子空间里, 本征能量为 $E_1 = g\sqrt{n}$,

$$E_2 = -g\sqrt{n}. \quad (11)$$

本征能量 E_2 之所以为负是因为在相互作用表象中舍弃了激发态 $|e\rangle_j$ 的自由能 ω 。 E_1 与 E_2 对应的本征态为

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle), \quad (12)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle), \quad (13)$$

初态可以重写为

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle), \quad (14)$$

系统的态演化为

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-ig\sqrt{n}t} |\Psi_1\rangle + e^{ig\sqrt{n}t} |\Psi_2\rangle), \quad (15)$$

重写作

$$|\Psi(t)\rangle = \left(\cos(g\sqrt{n}t) |\phi_1\rangle - i \sin(g\sqrt{n}t) |\Psi_2\rangle \right). \quad (16)$$

选择 $g\sqrt{n}t = \frac{\pi}{2}$, 即 $t = \frac{\pi}{2g\sqrt{n}}$, 有

$$\left| \Psi\left(\frac{\pi}{2g\sqrt{n}}\right) \right\rangle = -i \frac{1}{\sqrt{n}} (|e_1g_2 \cdots g_n\rangle + |g_1e_2 \cdots g_n\rangle + \cdots + |g_1g_2 \cdots g_{n-1}e_n\rangle) |0\rangle. \quad (17)$$

于是得到了 n - 离子的 W 态。

现在简要讨论一下本方案的实验可行性。当共振

频率为 $\frac{\nu}{2\pi} = 200$ kHz 时, 选择参数 $\eta = 0.10$, $\Omega = 0.1\nu$, 于是在可分辨边带区域条件 $\nu \gg \Omega$ 的条件可以得到满足。选择离子 $^{40}\text{Ca}^+$ 的能级 $|g = S_{1/2}\rangle$ 为基态, $|e = I_{3/2}\rangle$ 为激发态。目前, 最精确的实验^[22]表明: 离子 $^{40}\text{Ca}^+$ 处于能级 $D_{5/2}$ 的寿命为 1.168 9 s。当离子数 $N=3$ 、与激光作用的时间为 10^{-5} s (远远小于离子的自发辐射时间), 因自发辐射造成的损耗可以忽略不计。因此, 本方案在目前的实验技术条件下可以实现。

3 结语

本文提出了一个制备可扩展的多离子的 W 态的方案, 方案中只需要单束激光与离子相互作用, 而且可以扩展到任意多个离子, 制备 W 态的时间随离子数的增加而减少, 此外, 还避免了激光对单个离子的操纵。与以前的方案相比有更高的速度, 利用现有的囚禁离子技术可以实现。

参考文献:

- [1] Zheng S B. One-Step Synthesis of Multiatom Greenberger-Horne-Zeilinger States[J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 87: 230404-230407.
- [2] Zheng X J, Cao S, Fang M F, et al. Scheme for Implementing Quantum Dense Coding with Four-Particle Deherence-Free States in an Ion Trap[J]. Chinese Phys. B, 2008, 17(2): 431-434.
- [3] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [4] Zou Y B, Pahlke K, Mathis W. Generation of an Entangled State of Two Three-Level Atoms in Cavity QED[J]. Phys. Rev. A, 2003, 67: 044301-044303.
- [5] Zheng X J, Fang M F, Cai J W, et al. Quantum Teleportation by Entanglement Swapping with Trapped Ions[J]. Chinese Phys., 2006, 15(3): 492-495.
- [6] Zheng X J, Fang M F, Liao X P, et al. Teleportation for an Ionic Entangled Internal State by Entanglement Swapping[J]. Chinese Phys. Lett., 2006, 23(8): 1980-1983.
- [7] Jin G S, Li S S, Feng S L, et al. Method for Generating Maximally Entangled States of Multiple Three-Level Atoms in Cavity QED[J]. Phys. Rev. A, 2004, 69: 034302-034306.
- [8] Zheng X J, Fang M F, Liao X P, et al. Fast Scheme for Generating Quantum-Interference States and GHZ State of N Trapped Ions[J]. Chinese Phys., 2007, 16(4): 906-909.
- [9] Dir W, Vidal G, Cirac J I. Three Qubits Can Be Entangled in Two Inequivalent Ways[J]. Phys. Rev. A, 2000, 62: 062314-062316.
- [10] Eibl M, Kiesel N, Bourennane M, et al. Experimental Realization of a Three-Qubit Entangled W State[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 077901-077905.
- [11] Roos C F, Riebe M, Häffner H, et al. Control and Measurement of Three-Qubit Entangled States[J]. Science, 2004, 304: 1478-1480.
- [12] Guo G P, Li C F, Li J, et al. Scheme for the Preparation of Multiparticle Entanglement in Cavity QED[J]. Phys. Rev. A, 2002, 65: 042102-042106.
- [13] Guo G C, Zhang Y S. Scheme for Preparation of the W State Via Cavity Quantum Electrodynamics[J]. Phys. Rev. A, 2002, 65: 054302-054305.
- [14] Wang X G, Feng M, Sanders B C. Multipartite Entangled States in Coupled Quantum Dots and Cavity QED[J]. Phys. Rev. A, 2003, 67: 022302-022310.
- [15] Marr C, Beige A, Rempe G. Entangled-State Preparation Via Dissipation-Assisted Adiabatic Passages[J]. Phys. Rev. A, 2003, 68: 033817-033828.
- [16] Zheng S B. Scalable Generation of Multi-Atom W States with a Single Resonant Interaction[J]. J. Opt. B, 2005(7): 10-13.
- [17] Deng Z J, Feng M, Gao K L. Simple Scheme for Generating an n -Qubit W State in Cavity QED[J]. Phys. Rev. A, 2006, 73: 014302-014306.
- [18] James D F V. Quantum Dynamics of Cold Trapped Ions with Application to Quantum Computation[J]. Appl. Phys. B, 1998, 66: 181-190.
- [19] Wu Y, Yang X. Jaynes-Cummings Model for a Trapped Ion in Any Position of a Standing Wave[J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 3086-3088.
- [20] Yang X, Wu Y, Li Y. Unified and Standardized Procedure to Solve Various Nonlinear Jaynes-Cummings Models[J]. Phys. Rev. A, 1997, 55: 4545-4551.
- [21] Cirac J I, Zoller P. Quantum Computations with Cold Trapped Ions[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74: 4091-4094.
- [22] Kreuter A, Becher C, Lancaster G P T, et al. Experimental and Theoretical Study of the $3d^2D$ -Level Lifetimes of $^{40}\text{Ca}^+$ [J]. Phys. Rev. A, 2005, 71: 032504-032516.

(责任编辑: 张亦静)