Riccati方程的可积条件及通积分的讨论研究

赵临龙[1, 2]

（1. 安康学院 数学系，陕西 安康 725000；2. 安康学院 数学与应用数学研究所，陕西 安康 725000）

摘　要：利用Riccati微分方程的可积性基本理论，讨论了《Riccati方程的可积条件及通积分》一文：其理论为Riccati微分方程可积性基本理论的特例；分析其推论错误；指出行文笔误。然后用Riccati微分方程的可积性基本理论研究文中例题。

关键词：Riccati方程；可积性；理论应用

中图分类号：O175.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)01-0034-02

Discussion on the Text of《Integral Conditions and Representatives of Riccati Equation》

Zhao linlong

（1. Department of Mathematics, School of Ankang，Ankang Shanxi 725000 China；
2. Institute of Mathematics and Applied Mathematics, School of Ankang，Ankang Shanxi 725000 China）

Abstract：Using the basic theory of integrability of Riccati differential equation, a text of《Integral Conditions and Representatives of Riccati Equation》 is carried on a discussion, of which the theories are the especially examples of basic theory. The inference mistake is analyzed and the writing mistake is also pointed out in these examples. Finally, some text examples are studied by using its basic theory of Riccati differential equation.

Key words：Riccati equation; integrability; theories applied.

对于Riccati微分方程：

$$L[y]=-y'+P(x)y^n+Q(x)y+R(x),P(x)R(x)\neq 0,n\neq 0,1 \quad (1)$$

研究其可积性热度不减[1]。尤其文献[2]，在讨论Riccati微分方程可积性时，指出文献[3]的Riccati微分方程可积性基础理论无法解决文献[2]的Riccati微分方程的可积性，下面就此问题进行讨论。

1　Riccati微分方程可积性理论的背景

1.1　Riccati微分方程可积性的基础

1841年，Liouvlle证明了Riccati微分方程：

$$L[y]=-y'+P(x)y^2+Q(x)y-R(x)\text{，}(P(x)R(x)\neq 0)\text{，} \quad (2)$$

一般无初等解。但对于已知的连续函数$P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$（以下简记为P、Q、R），若找到方程（2）的1个特解y_0时，则方程（2）通过变换：

$$y=z+y_0\text{，}(y_0\neq 0) \quad (3)$$

化为可积的Bernoulli方程：

$$z'=Pz^2-(2y_0P+Q)z\text{，}(y_0\neq 0) \quad (4)$$

则

$$z=\frac{e^{\int(2y_0P+Q)dx}}{c-\int pe^{\int(2y_0P-Q)dx}dx}\text{，}(y_0\neq 0\text{，}c\text{为常数})。 \quad (5)$$

定理1　对于方程（2），若$L[y_0]=0(y_0\neq 0)$，则通过变换（3），求其通解为：

$$y=\frac{e^{\int(2y_0P-Q)dx}}{\left(c-\int pe^{\int(2y_0P+Q)dx}dx\right)}+y_0\text{，}(y_0\neq 0\text{，}c\text{为常数})。 \quad (6)$$

1.2　Riccati微分方程可积性的基本理论

1998年，赵临龙在文献[4]中提出了Riccati方程的

收稿日期：2008-11-07
基金项目：陕西省精品课程建设项目（2005-80）；陕西省教育厅教学研究资助项目(04G32)
作者简介：赵临龙（1960-），男，陕西西安人，安康学院教授，主要研究方向为常微分方程，E-mail：zll@aktc.net.cn

“不变量”概念，并用它研究Riccati方程的可积性。

定理2[4]　对方程（1），若存在常数α、β、γ和函数$D(x)$（$D(x)\neq 0$）（以下简记为D），满足不变量关系：

$$I_1=PR^{n-1}=\alpha\gamma^{n-1}D^n, \quad (7)$$

$$I_2=\frac{P'}{P}+(n-1)Q=\frac{D'}{D}+(n-1)\beta D, \quad (8)$$

或$I_2=\frac{R'}{R}-Q=\frac{D'}{D}-\beta D$，　（8′）

则方程（1）经线性变换：

$$y=\varphi(x)z,\ \varphi(x)=\left[\frac{\alpha D}{P}\right]^{1/(n-1)}\text{或}\varphi(x)=\left|\frac{R}{\gamma D}\right|, \quad (9)$$

化成积分形式：

$$\int\frac{dz}{\alpha z^n+\beta z+\gamma}=\int D dx。 \quad (10)$$

赵临龙在1999年“国际微分方程理论与应用”学术交流会上，再给出方程（2）的可积结论。

定理3[3]　对方程（2），若存在常数α、β、γ及函数$y_0(x)$和$D(x)(D(x)\neq 0)$（以下简记为y_0和D），满足不变量关系：

$$I_1=PL[y_0]=\alpha\gamma D^2, \quad (11)$$

$$I_2=\frac{P'}{P}+2y_0P+Q=\frac{D'}{D}-\beta D, \quad (12)$$

或$I_2=\frac{L'[y_0]}{L[y_0]}-2y_0P-Q=\frac{D'}{D}-\beta D$，　（12′）

其中$L[y_0]=-y'+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$，　（13）

则方程（2）经线性变换：

$$y=\varphi(x)z+y_0,\ \varphi(x)=\frac{\alpha D}{P}\text{或}\varphi(x)=\frac{R}{\gamma D}, \quad (14)$$

化成积分形式：

$$\int\frac{dz}{\alpha z^2+\beta z+\gamma}=\int D dx。 \quad (15)$$

注：1）在定理3中，当$y_0=0$，则$L[y_0]=R$，即定理3为定理2中的推广（$n=2$时）；

2）当$L[y_0]=0$，由式（11）求得$\alpha=0$或$\gamma=0$，即方程（2）化成可积的一阶线性方程或可积的Bernoulli方程。这充分揭示了Riccati方程与这两种方程的内在联系。

2　文献[2]的问题分析

1）其理论为Riccati微分方程可积性基本理论的特例。文献[2]通过以下2个变换：

$$y=u-\frac{Q}{2P}, \quad (16)$$

$$y=u-\frac{R}{Q}, \quad (16')$$

得到定理1和定理2。显然，式（16）和（16′）不过是线性变换（14）中$\varphi(x)=1$，$y_0=-\frac{Q}{2P}$及$\varphi(x)=1$，$y_0=-\frac{R}{Q}$的特殊情况。因此，凡有能用文献[2]中定理1和定理2解决的Riccati方程，都应该用本文定理3解决。

2）其推论错误。文献[2]给出的推论1和推论3，都是误将方程：

$$f'(y)y'=P(x)y^2+Q(x)y-R(x) \quad (17)$$

写成：

$$f(y)y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x), \quad (18)$$

因此，文献[2]所给出的推论1和推论3关于方程（18）的结论完全是错误的，而且，所给出的非Riccati方程的例题2中$\left(y'=e^x\sin y-e^{2x}+\left(\frac{1}{4}e^{3x}-\frac{1}{2}e^x\right)\csc y\right)$的解也是错误的；

3）行文笔误。方程（18）的笔误，导致推论1和推论3理论错误；另外，在定理1的推导中，误将变换（16）写成$y=u+\frac{Q}{2P}$；再在推论4中，已取$P=1$，而结论中还在用P表示通积分。

3　Riccati微分方程可积性的基本理论应用

3.1　直接由定理2讨论方程（2）的可积性

由定理2求出常数α、β、γ和函数$D(x)$（$D(x)\neq 0$），则方程（2）化成积分形式（10）。

问题1[2]　求方程$y'=2xy^2+\frac{1}{x}y+\frac{1}{x^3}$的解（原文例题3）。

由$I_1=PR=\frac{2}{x^2}=\alpha\gamma D^2$，取$\alpha=1$，$\gamma=2$，$D=\frac{1}{x}$，

则$I_2=\frac{P'}{P}+Q=\frac{2}{x}=\frac{D'}{D}+\beta D=-\frac{1}{x}+\frac{\beta}{x}$，求得$\beta=3$。

于是$\int\frac{dz}{z^2+3z+2}=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{z+1}{z+2}=cx \Rightarrow z=\frac{2cx-1}{1-cx}$，

则$y=\left(\frac{\alpha D}{P}\right)z=\frac{1}{2x^2}\left(\frac{2cx-1}{1-cx}\right)=\frac{2cx-1}{2x^2-2cx^3}$。

3.2　由定理3讨论方程（2）的可积性

由定理求出若存在常数α、β、γ及函数$y_0(x)$和$D(x)$（$D(x)\neq 0$），则方程（2）化成积分形式（15）。

问题2[2]　求方程$y'=\frac{1}{x^2}y^2+\frac{2}{x^3}y-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$的解（原文例题1）。

由于方程$y'=\frac{1}{x^2}\left(y-\frac{1}{x}\right)^2y+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\left[\left(y-\frac{1}{x}\right)^2+1\right]$，

取$y_0=-\frac{1}{x}\pm 1$，$L(y_0)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}$。

由$I_1=PL[y_0]=\frac{1}{x^4}=\alpha\gamma D^2$，取$\alpha=\gamma=1$，$D=\frac{1}{x^2}$，则

$I_2=\frac{P'}{P}+2y_0P+Q=-\frac{2}{x^2}+2\left(-\frac{1}{x}\pm 1\right)\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=$

$-\frac{2}{x}\pm\frac{2}{x^2}=\frac{D'}{D}-\beta D=-\frac{2}{x}+\frac{\beta}{x^2}$，求得$\beta=\pm 2$。

于是$\int\frac{dz}{(z\pm 1)^2}=\int\frac{1}{x^2}dx \to \frac{1}{z\pm 1}=\frac{1}{x}+c \to$

（下转第53页）