基于CC-OWG算子的区间数多属性群决策方法

汪新凡

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：针对属性权重和属性值均以区间数形式给出的不确定多属性决策问题，提出一种基于CC-OWG算子的区间数多属性群决策方法。该方法利用连续区间数据有序加权平均（C-OWA）集成算子对区间数属性权重进行处理，利用组合的连续区间数据有序加权几何（CC-OWG）集成算子对区间数属性值进行集成。最后，以实例分析说明了该方法的实用性和有效性。

关键词：多属性群决策；区间数；C-OWA算子；C-OWG算子；CC-OWG算子

中图分类号：N945.25　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)01-0028-06

Group Decision Making Method of Interval Multiple Attribute Based on CC-OWG Operator

Wang Xinfan

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract: For interval multiple attribute group decision making problems, in which all attribute weights and attribute values are interval numbers, an approach based on CC-OWG operator is developed. This method deals with interval attribute weights by using continuous interval argument OWA (C-OWA) operator, and aggregates interval attribute values by using combined continuous interval argument OWG (CC-OWG) operator. Finally, an illustrative example shows the feasibility and effectiveness of this method.

Key words: multiple attribute group decision making; interval number; C-OWA operator; C-OWG operator; CC-OWG operator

0　引言

近20年来，多属性决策理论、方法的研究取得了很大进展，已成为决策科学、信息科学、系统科学和管理科学等学科研究中一个十分活跃的课题。同时，它们在工程设计、经济、管理及军事等诸多领域有着广泛的实际应用背景。

目前，对属性权重和属性值均以区间数形式给出的不确定多属性决策问题的研究已引起人们的广泛关注[1-12]，其研究方法大致有以下几类：1）误差分析方法[1-2]；2）借助对区间数排序方法的研究，对区间数决策方案进行排序[2-4]；3）线性规划方法和目标规划方法[5-7]；4）TOPSIS方法[8]；5）灰色关联分析法[9-11]；6）集对分析方法[12]等。2004年，Yager[13]提出了一种连续区间数据有序加权平均（continuous interval argument OWA，简称C-OWA）集成算子；2006年，Yager和徐泽水[14]提出了一种基于C-OWA算子的连续区间数据有序加权几何（continuous interval argument OWG，简称C-OWG）算子。徐泽水[15]把C-OWA算子进行拓展，提出了加权的C-OWA（WC-OWA）算子、有序加权的C-OWA（OWC-OWA）算子和组合的C-OWA（CC-OWA）算子，并基于这些算子，分别在单人决策和群

收稿日期：2008-07-30
基金项目：湖南省教育厅基金资助项目（07C232），湖南省教育科学“十一五”规划课题研究基金资助项目（XJK06CJJ044）
作者简介：汪新凡（1966-），男，湖南安化人，湖南工业大学教授，主要从事决策分析与信息融合方面的研究，
E-mail：zzwxfydm@126.com

体决策两种情形下，提出了属性权重确知且属性值以区间数形式给出的不确定多属性决策方法。

本文针对属性权重和属性值均以区间数形式给出的不确定多属性决策问题，利用C-OWA算子和C-OWG算子进行研究。

1　CC-OWG 算子

1988年，美国著名学者Rager教授提出了一种有序加权平均（OWA）算子：

定义 1[16]　设 OWA：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$，若

$$OWA_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j, \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$是与函数 OWA 相关联的加权向量，$w_j \in [0,1]$，$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，且 b_j 是一组数据 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中第 j 个最大的元素，$\mathbf{R}$ 为实数集，则称函数 OWA 为有序加权平均算子，简称OWA算子。

由于OWA算子只适合对离散型数据进行集成，故Yager教授等又提出了2种适合集成连续型数据信息的集成算子：

定义 2[13]　设$[a,b]$为区间数，$f:\Theta \to \mathbf{R}$，且

$$f_\rho([a,b]) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\rho(y)}{\mathrm{d}y}(b - y(b-a))\mathrm{d}y = a\left(1 - \int_0^1 \rho(y)\mathrm{d}y\right) + b\int_0^1 \rho(y)\mathrm{d}y, \tag{2}$$

其中：$\Theta = \{[a,b] \mid b \geq a\}$，$\rho:[0,1] \to [0,1]$是具有下列性质的函数：1）$\rho(0) = 0$；2）$\rho(1) = 1$；3）若 $x > y$，则 $\rho(x) \geq \rho(y)$，称 f 为连续区间数据有序加权平均集成算子，简称为C-OWA算子，ρ 称为基本的单位区间单调（basic unit-interval monotonic，简称BUM）函数。

例如，若取$\rho(y) = y^r (r > 0)$，则有

1）$f_\rho([a,b]) = \dfrac{b + ra}{r+1}$；　（3）

2）当 $r \to 0$ 时，$f_\rho([a,b]) = b$，可得最大值；

3）当 $r = 1$ 时，$f_\rho([a,b]) = \dfrac{a+b}{2}$，为常用算术平均；

4）当 $r \to +\infty$ 时，$f_\rho([a,b]) = a$，可得最小值；

5）当 $r = \dfrac{l}{s}$ 时，$f_\rho([a,b]) = \dfrac{la + sb}{s+l}$。

定义 3[14]　设 $g:\Omega \to \mathbf{R}^+$，若

$$g_\rho([a,b]) = b \cdot \left[\frac{a}{b}\right]^{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\rho(y)}{\mathrm{d}y} y \mathrm{d}y} = a^{\left(1 - \int_0^1 \rho(y)\mathrm{d}y\right)} \cdot b^{\int_0^1 \rho(y)\mathrm{d}y}, \tag{4}$$

其中：ρ 为BUM函数，$\Omega = \{[a,b] \mid b \geq a > 0\}$，$\mathbf{R}^+$ 为正实数集，则称 g 为连续区间数据有序加权几何算子，简称为C-OWG算子。

例如，若取$\rho(y) = y^r (r > 0)$，则有：

1）$g_\rho([a,b]) = a^{\frac{r}{r+1}} \cdot b^{\frac{1}{r+1}}$；　（5）

2）当 $r \to 0$ 时，$g_\rho([a,b]) = b$，可得最大值；

3）当 $r = 1$ 时，$g_\rho([a,b]) = (ab)^{\frac{1}{2}}$，为常用几何平均；

4）当 $r \to +\infty$ 时，$g_\rho([a,b]) = a$，可得最小值；

5）当 $r = \dfrac{l}{s}$ 时，$g_\rho([a,b]) = a^{\frac{l}{s+l}} \cdot b^{\frac{s}{s+l}}$。

以下将C-OWG算子进行拓展，提出加权的C-OWG（WC-OWG）算子、有序加权的C-OWG（OWC-OWG）算子和组合的C-OWG（CC-OWG）算子，以便对2个或2个以上的区间数决策信息进行集成。

定义 4　设$[a_i, b_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$是一组区间数，且设 $WC\text{-}OWG$: $\Omega^n \to \mathbf{R}^+$，若

$$WC\text{-}OWG_w([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} \left(g_\rho([a_i, b_i])\right)^{w_i}, \tag{6}$$

其中：$\Omega = \{[a,b] \mid b \geq a > 0\}$，$g_\rho([a_i, b_i])$（$i$=1,2,⋯,$n$）由式（4）所确定，$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$为区间数据组$[a_i, b_i]$（$i$=1,2,⋯,$n$）的指数加权向量，且$w_i \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，则称函数 $WC\text{-}OWG$ 为加权的C-OWG算子，简称WC-OWG算子。其特点是：先利用C-OWG算子对每个区间$[a_i, b_i]$中的所有数据进行集成，再对集成后的所有数据$g_\rho([a_i, b_i])$（i=1,2,⋯,n）进行加权几何集成。

定义 5　设$[a_i, b_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$是一组区间数，且设 $OWC\text{-}OWG$: $\Omega^n \to \mathbf{R}^+$，若

$$OWC\text{-}OWG_v([a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^{n} \left(g_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}])\right)^{v_i}, \tag{7}$$

其中：$\Omega = \{[a,b] \mid b \geq a > 0\}$，$g_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}])$（$i$=1,2,⋯,$n$）由式（4）所确定，$(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$是（1,2,⋯,$n$）的一个置换，使得 $g_\rho([a_{\sigma(i-1)}, b_{\sigma(i-1)}]) \geq g_\rho([a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}])$（$i$=2,3,⋯,$n$），$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$是与函数 $OWC\text{-}OWG$ 相关联的加权向量，$v_i \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$，则称函数 $OWC\text{-}OWG$ 为有序加权的C-OWG算子，简称OWC-OWG算子。有关加权向量 $\boldsymbol{v}$ 的确定有多种方法，文献[17]对目前主要的赋权方法进行了综述，一般可由下式给出[16]：

$$v_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right),\ i = 1, 2, \cdots, n。 \tag{8}$$

其中：Q 为模糊语义量化函数，由下式给出：

$$Q(r)=\begin{cases}0, & r<\xi;\\ \dfrac{r-\xi}{\eta-\xi}, & \xi\le r\le\eta;\\ 1, & r>\eta。\end{cases}\qquad(9)$$

式（9）中：$\xi,\eta,r\in[0,1]$，且对应于模糊语义量化准则："至少半数"，"大多数"，"尽可能多" 的函数 Q 中的参数对分别为 $(\xi,\eta)=(0，0.5)$，$(\xi,\eta)=(0.3，0.8)$，$(\xi,\eta)=(0.5，1.0)$。

OWC-OWG算子的根本特点是：先利用C-OWG算子对每一个区间 $[a_i,b_i]$ 中的所有数据进行集成，然后对集成后的所有数据 $g_\rho([a_i,b_i])$（$i=1,2,\cdots,n$）按从大到小的顺序重新排序后加权集成，且元素 $g_\rho([a_i,b_i])$ 与 v_i 没有任何联系，v_i 只与集成过程中的第 i 个位置有关（加权向量 $\boldsymbol{v}$ 也称为位置向量）。

定义6 设 $[a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$ 是一组区间数，且设 $CC\text{-}OWG:\Omega^n\to\mathbf{R}^+$，若

$$CC\text{-}OWG_{v,w}\left([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(h_\rho\left(\left[a_{\sigma(i)},b_{\sigma(i)}\right]\right)\right)^{v_i}，\qquad(10)$$

其中：$\Omega=\{[a,b]|b\ge a>0\}$，$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm T}$ 是与函数 $CC\text{-}OWG$ 相关联的加权向量，$v_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{n}v_i=1$，且 $h_\rho\left(\left[a_{\sigma(i)},b_{\sigma(i)}\right]\right)$ 是一组加权数据 $\left(\left(g_\rho([a_1,b_1])\right)^{nw_1},\left(g_\rho([a_2,b_2])\right)^{nw_2},\cdots,\left(g_\rho([a_n,b_n])\right)^{nw_n}\right)$ 中第 i 个最大的元素，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 是（1，2，…，n）的一个置换，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$ 为区间数据组 $[a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量，$w_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，n 是平衡因子，$g_\rho([a_i,b_i])$（$i=1,2,\cdots,n$）由式（4）确定，则称函数 $CC\text{-}OWG$ 为组合的C-OWG算子，简称为CC-OWG算子。

特别地，若 $\boldsymbol{v}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$，则CC-OWG算子退化成WC-OWG算子；若 $\boldsymbol{w}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$，则CC-OWG算子退化成OWC-OWG算子。由此可知，CC-OWG算子同时推广了WC-OWG算子和OWC-OWG算子，不仅体现了每个连续区间数据自身的重要性程度，且反映了该数据所在位置的重要性程度。

2 基于CC-OWG算子的区间数多属性群决策方法

2.1 区间数多属性决策问题描述

设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为决策方案集，$I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 为评价指标（属性）集，$\tilde{\boldsymbol{w}}=(\tilde w_1,\tilde w_2,\cdots,\tilde w_n)^{\mathrm T}$ 为区间数属性权重向量，$\tilde w_j=\left[w_j^-,w_j^+\right]\subset[0,1]$，$\sum_{j=1}^{n}w_j^-<1$，$\sum_{j=1}^{n}w_j^+>1$。设决策者给出方案 $A_i\in A$ 在属性 $I_j\in I$ 下的属性值为 $\tilde\alpha_{ij}$（这里 $\tilde\alpha_{ij}=\left[p_{ij},q_{ij}\right]$ 为区间数），从而构成区间数决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(\tilde\alpha_{ij}\right)_{m\times n}$。假设规范化后的决策矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{R}}=\left(\tilde\beta_{ij}\right)_{m\times n}$，其中 $\tilde\beta_{ij}=\left[a_{ij},b_{ij}\right]$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。区间数多属性决策问题，就是要在给定区间数属性权重和区间数决策矩阵的情况下，从 m 个决策方案中选出最优方案或对这些方案进行排序。

2.2 利用C-OWA算子处理区间数属性权重

处理区间数属性权重的一般思路是将其转化为确定性权重向量[5-7,12]，称其为目标权重向量，记为 $\boldsymbol{w}^*=\left(w_1^*,w_2^*,\cdots,w_n^*\right)^{\mathrm T}$，易知 $w_j^*\in\left[w_j^-,w_j^+\right]$，$\sum_{j=1}^{n}w_j^*=1$（由此式和C-OWG算子的定义可知，不宜采用C-OWG算子处理区间数属性权重）。由式（2）可得：

$$w_j^*=f_\rho\left[w_j^-,w_j^+\right]=w_j^-\cdot\left(1-\int_0^1\rho(y)\mathrm dy\right)+w_j^+\cdot\int_0^1\rho(y)\mathrm dy。\qquad(11)$$

式（11）中：ρ 为BUM函数，其选取必须满足 $\sum_{j=1}^{n}w_j^*=1$。例如，若取 $\rho(y)=y^r(r>0)$，则由式（3）可得 $w_j^*=f_\rho\left[w_j^-,w_j^+\right]=\dfrac{w_j^-+rw_j^+}{r+1}$，由 $\sum_{j=1}^{n}w_j^*=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{w_j^-+rw_j^+}{r+1}=1$，解得 $r=\dfrac{\sum_{j=1}^{n}w_j^-\ -1}{1-\sum_{j=1}^{n}w_j^+}>0$，从而有：

$$w_j^*=\frac{w_j^-\cdot\left(1-\sum_{j=1}^{n}w_j^-\right)+w_j^+\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}w_j^+-1\right)}{\sum_{j=1}^{n}w_j^+-\sum_{j=1}^{n}w_j^-}。\qquad(12)$$

将式（12）变形，则其与文献[12]中的式（3）完全一致。因此，通过式（12）就可确定目标权重向量 $\boldsymbol{w}^*=\left(w_1^*,w_2^*,\cdots,w_n^*\right)^{\mathrm T}$，这样的处理方式避免了目标规划方法求解的繁琐，也不需要根据决策矩阵调整权重向量，具有计算简单，数据可靠的优点。

2.3 基于CC-OWG算子的区间数多属性群决策步骤

基于CC-OWG算子的属性权重和属性值均以区间数形式给出的不确定多属性群决策的具体步骤为：

步骤1 设 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_t\}$ 为决策者集，$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_t)^{\mathrm T}$ 为决策者的权重向量，$e_k\in[0,1]$，$\sum_{k=1}^{t}e_k=1$。A 为决策方案集，I 为评价指标（属性）集，$\tilde{\boldsymbol{w}}=(\tilde w_1,\tilde w_2,\cdots,\tilde w_n)^{\mathrm T}$ 为区间数属性权重向量。设决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $A_i\in A$ 在属性 $I_j\in I$ 下的属性值为 $\tilde\alpha_{ij}^{(k)}$

（$\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}=\left[p_{ij}^{(k)},q_{ij}^{(k)}\right]$为区间数），从而构成区间数决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{B}}_k=\left(\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$。假设规范化后的决策矩阵为$\tilde{\boldsymbol{R}}_k=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$，其中$\tilde{\beta}_{ij}^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)},b_{ij}^{(k)}\right]$，$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

步骤 2　利用C-OWA算子，根据式（12）把区间数属性权重向量$\tilde{\boldsymbol{w}}=\left(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n\right)^{\mathrm{T}}$转化成目标权重向量$\boldsymbol{w}^*=\left(w_1^*,w_2^*,\cdots,w_n^*\right)^{\mathrm{T}}$。

步骤 3　利用CC-OWG算子对t位决策者给出的方案A_i在属性I_j下的属性值$\tilde{\beta}_{ij}^{(k)}=\left[a_{ij}^{(k)},b_{ij}^{(k)}\right]$（$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）进行集成，得到方案$A_i$在属性$I_j$下的群体属性值$\beta_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）：

$$\beta_{ij}=CC-OWG_{v,e}\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(1)},\tilde{\beta}_{ij}^{(2)},\cdots,\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)=\prod_{k=1}^{t}\left(h_\rho\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(\sigma(k))}\right)\right)^{v_k}\tag{13}$$

其中$\boldsymbol{v}=\left(v_1,v_2,\cdots,v_n\right)^{\mathrm{T}}$是与CC-OWG算子相关联的指数加权向量（位置向量），$v_k\in[0,1]$，$\sum_{k=1}^{t}v_k=1$，且$h_\rho\left(\beta_{ij}^{(\sigma(k))}\right)$是加权数据组$\left(\left(g_\rho\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(1)}\right)\right)^{te_1},\left(g_\rho\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(2)}\right)\right)^{te_2},\cdots,\left(g_\rho\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)\right)^{te_t}\right)$中第$k$个最大的元素，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$是（$1,2,\cdots,t$）的一个置换，$t$是平衡因子，$g_\rho\left(\beta_{ij}^{(k)}\right)$（$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）由C-OWG算子确定（其中BUM函数$\rho$可事先根据决策者的风险态度来确定[13,14]）：

$$g_\rho\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(k)}\right)=g_\rho\left(\left[a_{ij}^{(k)},b_{ij}^{(k)}\right]\right)=\left(a_{ij}^{(k)}\right)^{1-\int_0^1\rho(y)\mathrm{d}y}\cdot\left(b_{ij}^{(k)}\right)^{\int_0^1\rho(y)\mathrm{d}y},\tag{14}$$

从而得到群决策矩阵$\boldsymbol{R}=\left(\beta_{ij}\right)_{m\times n}$。

步骤 4　利用WGA算子对决策矩阵$\boldsymbol{R}=\left(\beta_{ij}\right)_{m\times n}$中第$i$行的属性值进行加权集成，得到方案$A_i$的群体综合属性值$\beta_i$（$i=1,2,\cdots,m$）：

$$\beta_i=WGA_{w^*}\left(\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{in}\right)=\prod_{j=1}^{n}\beta_{ij}^{w_j^*}。\tag{15}$$

步骤5　利用β_i（$i=1,2,\cdots,m$）对所有方案A_i（$i=1,2,\cdots,m$）进行排序并择优。

在实际决策过程中，针对不同的决策问题，可根据CC-OWA算子[15]和CC-OWG算子的特点，适当地进行选择：1）若突出单个专家的作用，如采用“一票否决制”，则运用CC-OWG算子比较适合；2）若强调专家群体的作用，则选择CC-OWA算子比较适合。

3　实例分析

考虑某个制造商研制某种反舰导弹武器系统问题。现有4个备选方案A_i（$i=1,2,3,4$）供制造商选择，而评价反舰导弹武器系统的性能指标（属性）主要有6个[18]：导弹命中与毁伤能力（I_1）、火控系统作战能力（I_2）、抗干扰能力（I_3）、导弹飞行控制能力（I_4）、导弹制导能力（I_5）、载舰移动能力（I_6）。已知属性权重向量为$\tilde{\boldsymbol{w}}=\left(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\cdots,\tilde{w}_n\right)^{\mathrm{T}}$，其中$\tilde{w}_1$=[0.16, 0.20]，$\tilde{w}_2$=[0.14,0.16]，$\tilde{w}_3$=[0.15,0.18]，$\tilde{w}_4$=[0.13,0.17]，$\tilde{w}_5$=[0.14,0.18]，$\tilde{w}_6$=[0.11, 0.19]。现有3位决策者$d_k$（$k$=1,2,3），其权重向量为$\boldsymbol{e}$=(0.4, 0.3, 0.3)$^{\mathrm{T}}$，依照评估标准对4个备选方案进行评估打分（范围为0～100分），各指标均为效益型，评估信息用区间数表示，决策矩阵见表1～3，试确定最佳方案。

表 1　决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(1)}\right)_{4\times6}$

Tab. 1　Decision Matrix $\boldsymbol{R}_1=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(1)}\right)_{4\times6}$

备选方案	性能指标					
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
A_1	[75，85]	[75，80]	[80，85]	[76，78]	[80，90]	[92，95]
A_2	[72，80]	[74，77]	[85，90]	[80，84]	[95，96]	[82，86]
A_3	[73，81]	[75，79]	[80，86]	[85，90]	[75，78]	[80，83]
A_4	[90，95]	[72，76]	[78，82]	[79，83]	[85，88]	[94，96]

表 2　决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(2)}\right)_{4\times6}$

Tab. 2　Decision Matrix $\boldsymbol{R}_2=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(2)}\right)_{4\times6}$

备选方案	性能指标					
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
A_1	[80，84]	[86，90]	[84，87]	[77，81]	[90，95]	[75，80]
A_2	[80，83]	[90，94]	[95，98]	[73，80]	[85，88]	[89，94]
A_3	[72，76]	[85，90]	[85，90]	[74，77]	[75，80]	[80，85]
A_4	[82，84]	[80，84]	[80，85]	[76，85]	[79，85]	[82，86]

表 3　决策矩阵 $\boldsymbol{R}_3=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(3)}\right)_{4\times6}$

Tab. 3　Decision Matrix $\boldsymbol{R}_3=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(3)}\right)_{4\times6}$

备选方案	性能指标					
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
A_1	[96，99]	[76，79]	[85，89]	[90，95]	[75，83]	[85，89]
A_2	[73，76]	[85，88]	[85，87]	[95，97]	[75，78]	[76，80]
A_3	[85，88]	[75，77]	[75，80]	[89，93]	[96，99]	[75，79]
A_4	[78，85]	[88，90]	[80，86]	[75，81]	[85，89]	[78，80]

考虑到所有指标的量纲一致，为方便起见，不把决策矩阵规范化。下面利用本文提出的群决策方法进行求解。

步骤 1　利用式（12）求得目标权重向量为$\boldsymbol{w}^*$=（0.187 2，0.153 6，0.170 4，0.157 2，0.167 2，0.164 4）。

步骤 2　假设BUM函数为$\rho(y)=y^4$，则利用式（14）求得：

$g_\rho\left(\tilde\beta_{11}^{(1)}\right)=76.90$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{12}^{(1)}\right)=75.97$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{13}^{(1)}\right)=80.98$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{14}^{(1)}\right)=76.40$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{15}^{(1)}\right)=81.91$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{16}^{(1)}\right)=92.59$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{21}^{(1)}\right)=73.53$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{22}^{(1)}\right)=74.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{23}^{(1)}\right)=85.98$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{24}^{(1)}\right)=80.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{25}^{(1)}\right)=95.20$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{26}^{(1)}\right)=82.78$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{31}^{(1)}\right)=74.53$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{32}^{(1)}\right)=75.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{33}^{(1)}\right)=81.17$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{34}^{(1)}\right)=85.98$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{35}^{(1)}\right)=75.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{36}^{(1)}\right)=80.59$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{41}^{(1)}\right)=90.98$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{42}^{(1)}\right)=72.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{43}^{(1)}\right)=78.78$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{44}^{(1)}\right)=79.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{45}^{(1)}\right)=85.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{46}^{(1)}\right)=94.40$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{11}^{(2)}\right)=80.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{12}^{(2)}\right)=86.79$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{13}^{(2)}\right)=84.59$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{14}^{(2)}\right)=77.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{15}^{(2)}\right)=90.98$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{16}^{(2)}\right)=75.97$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{21}^{(2)}\right)=80.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{22}^{(2)}\right)=90.79$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{23}^{(2)}\right)=95.59$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{24}^{(2)}\right)=74.35$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{25}^{(2)}\right)=85.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{26}^{(2)}\right)=89.98$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{31}^{(2)}\right)=72.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{32}^{(2)}\right)=85.98$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{33}^{(2)}\right)=85.98$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{34}^{(2)}\right)=74.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{35}^{(2)}\right)=75.97$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{36}^{(2)}\right)=80.98$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{41}^{(2)}\right)=82.40$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{42}^{(2)}\right)=80.78$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{43}^{(2)}\right)=80.98$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{44}^{(2)}\right)=77.72$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{45}^{(2)}\right)=80.17$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{46}^{(2)}\right)=82.78$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{11}^{(3)}\right)=96.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{12}^{(3)}\right)=76.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{13}^{(3)}\right)=85.79$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{14}^{(3)}\right)=90.98$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{15}^{(3)}\right)=76.54$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{16}^{(3)}\right)=85.79$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{21}^{(3)}\right)=73.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{22}^{(3)}\right)=85.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{23}^{(3)}\right)=85.40$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{24}^{(3)}\right)=95.40$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{25}^{(3)}\right)=75.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{26}^{(3)}\right)=76.68$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{31}^{(3)}\right)=85.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{32}^{(3)}\right)=75.40$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{33}^{(3)}\right)=75.97$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{34}^{(3)}\right)=89.79$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{35}^{(3)}\right)=96.59$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{36}^{(3)}\right)=75.78$；

$g_\rho\left(\tilde\beta_{41}^{(3)}\right)=79.35$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{42}^{(3)}\right)=88.40$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{43}^{(3)}\right)=81.17$，

$g_\rho\left(\tilde\beta_{44}^{(3)}\right)=76.16$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{45}^{(3)}\right)=85.79$，$g_\rho\left(\tilde\beta_{46}^{(3)}\right)=78.40$。

选择模糊语义量化“大多数”准则，则由式（8）和（9）可得CC-OWG算子的加权向量为$\boldsymbol{v}=$（0.067，0.666，0.267）；然后利用CC-OWG算子即式（13）对3位决策者给出的方案A_i在属性I_j下的属性值$\tilde\beta_{ij}^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)},b_{ij}^{(k)}\right)$（$k=1,2,3$；$i=1,2,\cdots,4$；$j=1,2,\cdots,6$）进行集成，得到方案$A_i$在属性$I_j$下的群体属性值$\beta_{ij}$（$i=1,2,\cdots,4$；$j=1,2,\cdots,6$），从而得到群决策矩阵$\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R}=\left(\beta_{ij}\right)_{4\times6}=\begin{bmatrix}63.0554 & 58.3296 & 59.6308 & 60.2515 & 60.3524 & 58.8905\\ 55.1170 & 61.4572 & 64.0788 & 61.5967 & 58.7180 & 60.0539\\ 57.0520 & 57.7732 & 58.1944 & 59.7442 & 62.0462 & 56.0794\\ 57.8585 & 59.5298 & 56.9569 & 54.7365 & 59.1293 & 58.0225\end{bmatrix}。$$

步骤3 利用WGA算子即式（15）对群决策矩阵$\boldsymbol{R}=\left(\beta_{ij}\right)_{4\times6}$中第$i$行的属性值进行加权集成，得到方案$A_i$的群体综合属性值$\beta_i$（$i=1,2,\cdots,4$）：

$\beta_1=57.9468$，$\beta_2=57.8542$，$\beta_3=56.3357$，$\beta_4=55.6206$。

步骤4 利用β_i（$i=1,2,\cdots,4$）对所有方案A_i（$i=1,2,\cdots,4$）进行排序：$A_1\succ A_2\succ A_3\succ A_4$。因此，最佳方案是$A_1$。

4 结语

本文研究了属性权重和属性值均以区间数形式给出的不确定多属性决策问题，利用C-OWA算子对区间数属性权重进行处理，利用CC-OWG算子对区间数属性值进行集成，从而基于C-OWA算子和CC-OWG算子，提出了一种属性权重和属性值均以区间数形式给出的区间数多属性群决策方法。该方法能充分利用决策信息，计算简便快捷，无需对区间数进行排序。本文提出的一些拓展的C-OWG算子，如加权的C-OWG（WC-OWG）算子、有序加权的C-OWG（OWC-OWG算子和组合的C-OWG（CC-OWG）算子，在模式识别、人工智能、数据挖掘和专家系统等其它领域中也有着良好的应用前景，从而不仅丰富和发展了算子理论，而且为促进其实际应用进行了有益的尝试。

参考文献：

[1] Yoon K. The Propagation of Errors in Multiple-Attribute Decision Analysis: Practical Approach[J]. Journal of the Operational Research Society，1989，40(7)：681-686.

[2] 樊治平，郭亚军. 误差分析理论在区间数多属性决策问题中的应用[J]. 东北大学学报：自然科学版，1997，18(5)：550-560.
Fan Zhiping，Guo Yajun. An Application of Error Analysis Theory to the Multiple Attribute Decision Making with Interval Numbers[J]. Journal of Northeastern University：Natural Science，1997，18(5)：550-560.

[3] 张 全，樊治平，潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践，1999，19(5)：129-133.
Zhang Quan，Fan Zhiping，Pan Dehui. A Ranking Approach for Interval Numbers in Uncertain Multiple Attribute Decision Making Problems[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，1999，19(5)：129-133.

[4] 樊治平，张 全. 具有区间数的多属性决策问题的分析方法[J]. 东北大学学报：自然科学版，1998，19(4)：432-434.
Fan Zhiping，Zhang Quan. An Analysis Method for Multiple Attribute Decision Making Problems with Intervals[J]. Journal of Northeastern University：Natural Science，1998，19(4)：

432-434.

[5] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策，2001，16(S1)：818-821.
Xu Zeshui. Maximum Deviation Method Based on Deviation Degree and Possibility Degree for Uncertain Multi-Attribute Decision Making[J]. Control and Decision，2001，16(S1)：818-821.

[6] Bryson N, Mobolurin A. An Action Learning Evaluation Procedure for Multiple Criteria Decision Making Problems [J]. European Journal of Operational Research，1996，96：379-386.

[7] 樊治平，胡国奋. 区间数多属性决策的一种目标规划方法[J]. 管理工程学报，2000，14(4)：50-52.
Fan Zhiping，Hu Guofen. A Goal Programming Method for Multiple Attribute Decision Making with Intervals[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management，2000，14(4)：50-52.

[8] 尤天慧，樊治平. 区间数多指标决策的一种TOPSIS方法[J]. 东北大学学报：自然科学版，2002，23(9)：840-843.
You Tianhui, Fan Zhiping. TOPSIS Method for Multiple Attribute Decision Making with Intervals[J]. Journal of Northeastern University：Natural Science，2002，23(9)：840-843.

[9] 张吉军. 区间数多指标决策问题的灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术，2005，27(6)：1030-1033.
Zhang Jijun. Method of Grey Related Analysis to Multiple Attribute Decision Making Problem with Interval Numbers [J]. Systems Engineering and Electronics，2005，27(6)：1030-1033.

[10] Zhang J J，Wu D S，Olson D L. The Methods of Grey Related Analysis to Multiple Attribute Decision Making Problems with Interval Numbers[J]. Mathematical and Computer Modeling，2005，42：991-998.

[11] 卫贵武. 区间数多指标决策问题的新灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术，2006，28(9)：1358-1359，1383.
Wei Guiwu. New Method of Grey Relational Analysis to Multiple Attribute Decision Making with Intervals[J]. Systems Engineering and Electronics，2006，28(9)：1358-1359，1383.

[12] 叶跃祥，糜仲春，王宏宇，等. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术，2006，28(9)：1344-1347.
Ye Yuexiang，Mi Zhongchun，Wang Hongyu，et al. Set-Pair-Analysis-Based Method for Multiple Attributes Decision-Making with Intervals[J]. Systems Engineering and Electronics，2006，28(9)：1344-1347.

[13] Yager R R. OWA Aggregation Over a Aontinuous Interval Argument with Applications to Decision Making[J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics-Part B，2004，34(5)：1952-1963.

[14] Yager R R，Xu Zeshui. The Continuous Ordered Weighted Geometric Operator and Its Applications to Decision Making [J]. Fuzzy Sets and Systems，2006，157(10)：1393-1402.

[15] 徐泽水. 拓展的C-OWA算子及其在不确定多属性决策中的应用[J]. 系统工程理论与实践，2005，25(11)：7-13.
Xu Zeshui. Extended C-OWA Operators and Their Use in Uncertain Multi-Attribute Decision Making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2005，25(11)：7-13.

[16] Yager R R. On ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making[J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，1988，18(1)：183-190.

[17] Xu Z S. An Overview of Methods for Determining OWA Weights[J]. International Journal of Intelligent Systems，2005，20(8)：843-865.

[18] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004：141.
Xu Zeshui. The Uncertain Multi-Attribute Decision-Making Method and its Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press，2004：141.

（责任编辑：廖友媛）