

一种基于 Drucker-Prager 准则的钢管混凝土 轴压柱承载力计算方法

孔庆松¹, 刘平², 廖新贵³, 陈永贵¹

(1. 中铁二十五局集团 恒元建筑工程有限公司, 广西 柳州 545000; 2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240; 3. 湖南工业大学 岩土工程研究所, 湖南 株洲 412008)

摘要: 从钢管混凝土柱的工作机理出发, 研究 CSFT 中钢材和混凝土的本构关系。分别采用 Von Mises 和 Drucker-Prager 屈服准则分析钢材和核心混凝土的强度及屈服问题, 并由此推导出钢管混凝土柱的轴压承载力计算公式。

关键词: 钢管混凝土; Von Mises; Drucker-Prager; 本构关系; 屈服准则

中图分类号: TU392.3; TU323.1

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2009)01-0019-05

Method of Bearing Capacity for Axis Pressure Compression of Concrete Filled Steel Tube Based on Drucker-Prager Criteria

Kong Qingsong¹, Liu Ping², Liao Xingui³, Chen Yonggui¹

(1. China Railway 25th Bureau (group), Hengyuan Construction Engineering Limited Company, Liuzhou Guangxi 545000, China;

2. School of Marine Poise Ocean and Architecture Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

3. Insititute of Geotechnical Enginnering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

Abstract: Based on the principle of the concrete filled steel tube, study is carried on the constitutive relation of concrete and steel in CSFT. The axial compression bearing capacity of CFST is obtained by analyzing the strength and yielded problem with Von Mises and Drucker-Prager criterion.

Key words: CFST; Von Mises; Drucker-Prager; constitutive relation; yield criterion

“钢管混凝土”(concrete filled steel tube——CFST)是“钢管套箍混凝土”的简称,它具有抗压强度高、抗震性能好、施工方便、外形美观和造价经济等优点,在实际工程中得到了广泛的应用^[1]。由于钢材性能比较稳定,因此钢管与混凝土组合后的承载力主要取决于对核心混凝土强度的合理取值。关于钢管混凝土的破坏机理和强度计算,国内外学者做了许多研究。早期的研究采用极限承载力法来求解,认为钢管对核心混凝土提供了约束,使混凝土三向受压,从而提高了承载力,达到极限承载力时,钢管纵向应力为零,环向应力达到屈服点^[2]。但不少研究者通过试验观察到试

件在达到极限状态时,钢管纵向应力并未降为零,环向应力也未达到单向拉伸时的屈服点。近年来,许多研究者放弃了求极限承载力的方法,而采用钢管发展塑性,即混凝土达极限时为钢管混凝土轴心受压的极限。在考虑钢管的约束效应时,关键是如何确定进入塑性阶段时钢管的纵向应力。不同的研究者采用不同的强度理论:有的采用塑性理论;有的采用八面体理论;有的假设钢管和核心混凝土为理想弹塑性体,采用最大剪应力理论或采用莫尔强度理论,但每种假设均有不同程度的缺陷和不足。根据钢材和混凝土的材料性质以及轴心受压条件的物理性质和力学原理,本

收稿日期: 2008-07-25

作者简介: 孔庆松(1977-),男,广西蒙山人,中铁二十五局集团恒元建筑工程有限公司工程师,主要从事施工管理方面的工作,

E-mail: liaoher@sina.com

文分别利用 Von Mises 和 Drucker-Prager 屈服准则, 分析钢管和核心混凝土的受力情况和抗压强度, 推导轴心受压钢管混凝土短柱的极限承载力计算方法, 并给出一个简单实用、物理含义明确的公式。

1 钢管混凝土柱工作原理

钢管混凝土构件在承受轴心压力作用时截面保持平面, 钢管和混凝土共同受力而产生纵向变形及横向变形。横向应变与纵向应变之比称为泊松比或横向变形系数^[2]。

钢材的泊松比 μ_s 在弹性阶段变化很小, 平均值为 0.283, 进入弹塑性阶段后到屈服应力时, 由 0.283 逐渐增大到 0.5, 然后保持 0.5 不变 (在屈服阶段)。混凝土的横向变形系数 μ_c 则随纵向压应力的增大而变化, 由低应力时的 0.167 随抗压强度逐渐增大到 0.5 及更大。当钢管的纵向压应力 σ_3 接近比例极限时, $\mu_c \approx \mu_s$; 随着轴心压力的增加, $\mu_c > \mu_s$, 钢管的横向变形小于核心混凝土的横向变形, 这时混凝土横向变形受到钢管的约束, 由此产生了相互间的紧箍力 P , 此时核心混凝土处于三向受压状态 ($\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$), 而钢管处于纵向和径向受压 (σ_3, σ_2)、环向受拉 (σ_1) 的三向应力状态。

2 钢材三向应力状态下的本构关系

建筑钢材和钢管混凝土中的钢管在三向应力状态下应力-应变关系曲线理论模型如图 1 所示。其中钢管混凝土中的钢管工作状态分为弹性、弹塑性、塑性、强化和二次塑流等 5 个阶段, 图中 f_p 、 f_y 、 f_u 分别为钢材的比例极限、屈服极限和抗拉强度极限。

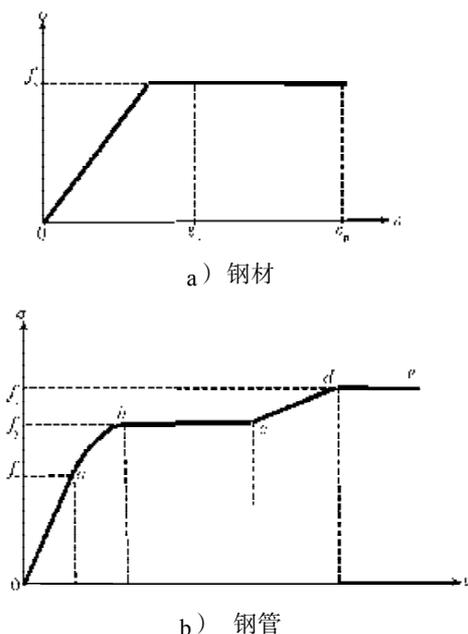


图 1 钢材、钢管的本构关系

Fig. 1 Constitutive relationship of steel and tube

2.1 弹性阶段 $0a$ ($\sigma \leq f_p$)

钢管在弹性阶段本构关系比较简单, 各种文献分析较多, E 及 μ 均为常数。

2.2 弹塑性阶段 ab ($f_p < \sigma < f_y$)

根据应力增量和应变增量关系 (采用弹性增量理论确定), 推导弹塑性阶段钢管的切线模量 E_s' 和泊松比 μ_s' ^[3-5]:

$$E_s' = \frac{(f_y - \sigma)\sigma}{(f_y - f_p)f_p} E_s \quad (1)$$

$$\mu_s' = 0.217 \frac{(\sigma - f_p)}{(f_y - f_p)} + 0.283 \quad (2)$$

2.3 塑性阶段 bc 及强化阶段 cd 和二次塑流阶段^[3-5]

采用增量理论求解应力与应变的增量关系, 推导塑性阶段的应力应变关系为

$$d\{\sigma\} - [D]_{ep} d\{\varepsilon\}, \quad (3)$$

式中 $[D]_{ep} = [D]_e - [D]_p$ 是弹塑性刚度矩阵, $[D]_e$ 和 $[D]_p$ 分别是弹性刚度矩阵和塑性刚度矩阵。

根据 Von Mises 屈服准则:

$$F(J_2) = J_2 - k^2 = 0, \quad (4)$$

式中: k 为表征材料屈服特征的参数, 可由简单拉伸试验确定, $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s$;

J_2 是指应力张量的第二不变量, 是应力张量与坐标系无关的常量,

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

考虑到径向应力 σ_2 较小, 可假设 $\sigma_2 \approx 0$, 则式 (4) 可化为二维应力状态: $\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_s^2$,

$$\text{可得 } \sigma_3 = \frac{\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\sigma_1^2 - \sigma_s^2)}}{2} \quad (6)$$

当环向拉力 σ_1 达到屈服应力 σ_s 时, $\sigma_3 = 0$ 或 $\sigma_3 = \sigma_s$ 。根据 Von Mises 屈服椭圆在第四象限的轨迹, σ_3 理论值应为零, 而试验和理论分析证明这不太可能。在研究过程中, 考虑到钢管在紧箍力的作用下为异号应力场, 抗压强度将下降, 有些学者取 $\sigma_3 < \sigma_s$, 并以软化系数 d 表示, $\sigma_3 = d \cdot \sigma_s$, $0.3 \leq d \leq 1.0$ 。但是在实际工程中, 更多的是不考虑这种影响, 而直接取 $\sigma_3 = \sigma_s$ 。关于这一点, 本文将在后面的内容加以考虑。

3 混凝土三向应力状态下的本构关系

混凝土在三向应力状态下, 应力-应变关系曲线理论模型如图 2 所示。

设混凝土在无约束状态下的单轴抗压强度和相应的应变分别为 f_c 、 ε_c , 当混凝土受到横向约束压力

P 时, 其单轴抗压强度 f_{cc} 和相应的应变 ε_{cc} 将大于无约束状态下的 f_c 和 ε_c (这也是影响钢管混凝土组合结构性能改善的主要因素), 它们之间的关系可表示为^[4]:

$$\begin{cases} f_{cc} = f_c - k_1 P, \\ \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c \left(1 + k_2 \frac{P}{f_c} \right), \end{cases} \quad (7)$$

式中 k_1 、 k_2 为常数, 由试验确定。考虑到强度 f_c 和应变 ε_c 变化相对较小, 本文在以下的讨论和计算中仍将采用 f_c 和 ε_c , 但在承载力计算中将采用强化系数加以修正。

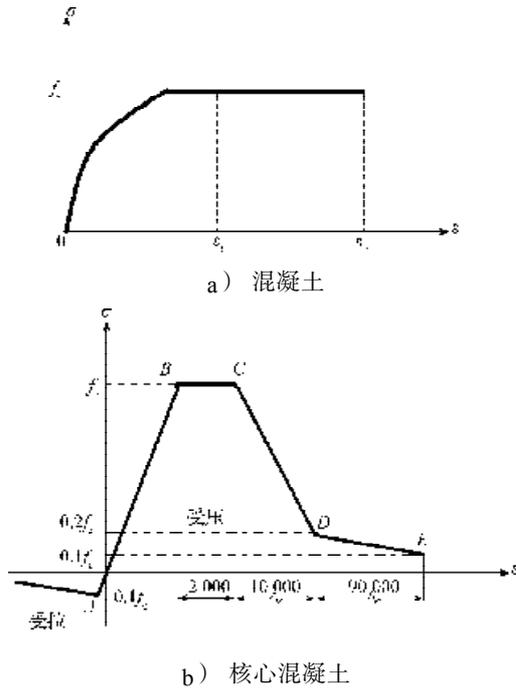


图2 混凝土和核心混凝土的本构关系

Fig. 2 Constitutive relationship of concrete and core concrete

混凝土在低围压下的脆性损伤及高围压下的塑性流动反映了混凝土的宏观变形特征: 塑性屈服受体积应力影响、材料体积膨胀、极限应力后的应变软化以及受拉应力作用下的开裂破坏。当核心混凝土受三向压应力作用时, 随着静水压力的增加, 混凝土的破坏主要由受压破坏面的扩张控制。当塑性变形发生时, 为描述屈服面在压缩和拉伸情况下的强化和软化, 由应力-应变关系曲线来引导屈服面的扩张。

根据 Drucker-Prager 屈服准则^[3-6]:

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 - \sqrt{J_2} - k = 0, \quad (8)$$

式中: $I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$;

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)},$$

α, k 为与材料内摩擦角和粘聚力有关的常数。

混凝土的单轴受拉屈服应力 σ_t 和单轴受压屈服应力 σ_c 可由试验确定, 则其内摩擦角和粘聚力可表示为

$$\phi = \sin^{-1} \left[\frac{3(\sigma_c - \sigma_t)}{3\sigma_c + \sigma_t} \right], \quad c = \frac{\sigma_c \sigma_t (3 - \sin \phi)}{3(\sigma_c + \sigma_t) \cos \phi}, \quad \text{所以可求得:}$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} = \frac{2 \cdot \frac{3(\sigma_c - \sigma_t)}{3\sigma_c + \sigma_t}}{\sqrt{3} \left(3 - \frac{3(\sigma_c - \sigma_t)}{3\sigma_c + \sigma_t} \right)} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3(\sigma_c - \sigma_t)}{3(3\sigma_c + \sigma_t) - 3(\sigma_c - \sigma_t)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t},$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} = \frac{6 \cdot \frac{\sigma_c \sigma_t (3 - \sin \phi)}{3(\sigma_c + \sigma_t) \cos \phi} \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sigma_c \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t};$$

整理上述参数可得:

$$\alpha(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3) + \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - k = 0. \quad (9)$$

4 钢管混凝土轴心受压承载力的计算

根据 Von Mises 屈服准则, 钢管进入塑性阶段后, 在环向应力增大时, 纵向应力必然下降。当钢管混凝土达到极限状态时, 钢管的环向应力 σ_1 达到抗拉强度 σ_s , 混凝土同时达到抗压强度, 核心混凝土所受的侧压力 σ_1' 可由静力平衡条件得出:

$$\sigma_1' = \frac{t}{r} \sigma_s = \frac{\phi}{2} \sigma_s, \quad (10)$$

式中: t 为钢管厚度;

r 为钢管混凝土柱的平均半径;

ϕ 为含钢率。

轴心受压的钢管混凝土中的核心混凝土处于三向受压应力状态下工作, 其应力状态为 $\sigma_3' < \sigma_1' = \sigma_2' < 0$, 则式 (9) 可进一步简化为:

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - k =$$

$$\alpha(2\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sqrt{3}}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) - k =$$

$$\left(\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \sigma_3 - \left(2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \sigma_1 - k = 0,$$

将 k, α 代入上式, 化简可知:

$$\sigma_3' = \frac{3\sigma_c - \sigma_1}{2\sigma_1} \sigma_1' - \sigma_c. \quad (11)$$

由混凝土单轴受压可知^[11], $\sigma_3' = f_c, \sigma_1' = \sigma_2' = 0$,

当满足莫尔强度准则时, $\sigma_c=f_c$, 即 σ_c 等于混凝土单轴受压的抗压强度。

令 $\beta = \frac{3\sigma_c - \sigma_1}{2\sigma_1}$, 则式(11)可变为:

$$\sigma_3' = \beta\sigma_1' + \sigma_c - \beta \frac{\varphi}{2} \sigma_s + f_c \quad (12)$$

式中 $\beta = \frac{3\sigma_c - \sigma_1}{2\sigma_1}$ 是钢管混凝土在三向受压作用时钢管与混凝土之间相互耦合的作用系数。

国内外研究者进行了大量的混凝土三向受压试验, 试验结果指出: 混凝土三向受压时的内摩擦角的变化范围为 $30^\circ \sim 50^\circ$, 当侧压力小时, 内摩擦角大; 侧压力大时, 内摩擦角小。钢管混凝土中的核心混凝土由于受到钢管的约束, 侧压力较大, 内摩擦角较小。因此, 计算钢管混凝土中的核心混凝土时, β 的理论值常取 $1.0 \sim 5.0$ 。由于混凝土材料的不均匀性及各种缺陷的存在, 使构件容易在薄弱截面发生破坏, 另外, 考虑到钢材强度下降的影响, k 的实际取值要更小一些, 一般建议取 $\beta=2.0$ ^[7-11]。

钢管混凝土的承载力是由钢管的承载力和核心混凝土的纵向承载力共同组成的, 即:

$$N = f_s A_s + \left(\beta \frac{\varphi}{2} \sigma_s + f_c \right) A_c \quad (13)$$

式中: N 为钢管混凝土轴压柱的承载力;

f_s (或 σ_s) 为钢材的屈服强度;

A_s 为钢管的受压面积;

f_c 为核心混凝土的抗压强度;

A_c 为核心混凝土的受压面积;

φ 为含钢率, $\varphi = A_s/A_c$ 。

5 计算值与试验数据对比

由式(13)可以看到, 钢管混凝土轴压力的承载力是由钢管混凝土中的钢筋单独屈服时的承载力 $f_s A_s$, 核心混凝土单独承载时的承载力 $f_c A_c$, 以及钢管与核心混凝土的相互作用所增加的承载值 $\beta \frac{\varphi}{2} \sigma_s A_c$ 组成。

国内外对钢管混凝土轴压柱承载力做过许多试验, 张素梅等人^[10]所做的试验比较典型, 试验结果与式(13)(取 $\beta=2.0$)的计算值对比如表1。最大误差是 14.44%, 结果符合较好。

表1 试验结果与理论值对比

Table 1 Theory result compared with test result

试件编号	直径 D/mm	管厚 T/mm	A_c/mm^2	A_s/mm^2	钢材强度 $f_s/(\text{N}\cdot\text{mm}^{-2})$	混凝土抗压强度 $f_c/(\text{N}\cdot\text{mm}^{-2})$	试验测得的 屈服力/kN	按式(13)的 计算值/kN	相对误差 /%
1	133.05	5.00	13 903.39	2 011.41	351.00	88.14	1 890	1 931	2.19
2	133.34	5.01	13 964.06	2 019.84	351.00	88.14	2 004	1 940	3.21
3	138.50	3.24	15 065.74	1 376.78	331.70	88.14	1 851	1 785	3.59
4	139.30	3.36	15 240.29	1 434.95	331.70	88.14	1 920	1 819	5.25
5	133.25	4.91	13 945.22	1 979.68	351.00	94.17	2 347	2 008	14.44
6	133.21	5.05	13 936.85	2 033.27	351.00	94.17	2 366	2 026	14.37
7	133.42	5.41	13 980.82	2 175.67	351.00	94.17	2 324	2 080	10.49
8	133.22	6.07	13 938.94	2 424.69	392.00	94.17	2 234	2 263	1.30
9	133.29	6.17	13 953.59	2 464.05	392.00	94.17	2 267	2 280	0.57
10	133.29	6.11	13 953.59	2 441.24	392.00	94.17	2 275	2 271	0.18
11	139.40	3.27	15 262.18	1 398.47	331.70	94.17	2 120	1 901	10.32
12	138.70	3.23	15 109.28	1 374.66	331.70	94.17	2 147	1 879	12.49
13	138.70	3.27	15 109.28	1 391.28	331.70	94.17	2 185	1 884	13.76
14	158.60	5.17	19 755.92	2 492.02	356.30	94.17	3 198	2 748	14.06
15	158.90	5.12	19 830.73	2 473.55	356.30	94.17	3 095	2 749	11.19
16	158.10	5.11	19 631.55	2 456.04	356.30	94.17	3 031	2 724	10.14

6 结语

本文以 Von Mises 和 Drucker-Prager 屈服准则为基础, 探讨了钢管混凝土受压承载力的理论计算方法, 给出了简单的计算公式。按式(13)计算的结果与试验结果较为接近, 说明了结果的可靠性与实用性, 也说明弹塑性理论中的 Von Mises 和 Drucker-Prager 屈服准则对钢管混凝土的强度和承载力的计算有较好的适用性。

参考文献:

- [1] 钟善桐. 钢管混凝土统一理论: 研究与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
Zhong Shantong. Unified Theory of CFST: Research & Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [2] 韩林海. 钢管混凝土结构[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Han Linhai. The Structure of CFST[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2004.

[3] 徐之纶. 弹性力学(上下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.
Xu Zhilun. Elastic Mechanics[M]. Beijing: People Education Press, 1979.

[4] 薛守义. 弹塑性力学[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2006.
Xue Shouyi. Elastic-Plastic Mechanics[M]. Beijing: China Building Material Industry Publishing House, 2006.

[5] 卓卫东. 应用弹塑性力学[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Zhuo Weidong. Application-Plastic Mechanics[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2004.

[6] 杨桂通. 弹塑性力学引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
Yang Guitong. Introduction-Plastic Mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[7] 赵鸿铁. 钢-混凝土组合结构[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
Zhao Hongtie. Steel-Concrete Composite Structure[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2001.

[8] 林宗凡. 钢-混凝土组合结构[M]. 上海: 同济大学出版社, 2004.
Lin Zongfan. Steel-Concrete Composite Structure[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2004.

[9] 卢方伟, 李四平, 孙国钧. 方钢混凝土轴压短柱的非线性有限元分析[J]. 工程力学, 2007, 24(3): 110-114.
Lu Fangwei, Li Siping, Sun Guojun. Nonlinear Finite Element Analysis of Square Concrete-Filled Steel Tube Columns under Compressive Load[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(3): 110-114.

[10] 张素梅, 刘界鹏, 马乐, 等. 圆钢管约束高强混凝土轴压短柱的试验研究与承载力分析[J]. 土木工程学报, 2007, 40(3): 24-31.
Zhang Sumei, Liu Jiepeng, Ma Le, et al. Axial Compression Test and Analysis of Circular Tube Confined HSC Stub Columns[J]. China Civil Engineering Journal, 2007, 40(3): 24-31.

[11] Park B Knowles. Axial Load Design for Concrete Filled Steel Tubes[J]. Journal of the Structural Division, ASCE, 1970 (10): 118-124.

(责任编辑: 张亦静)

声 明

据作者反映并经查证,有人在互联网用《湖南工业大学学报》期刊名发布约稿信息并作出稿件处理承诺,这是一种严重的欺骗行为。湖南工业大学期刊社郑重声明:本社3个学报(《湖南工业大学学报》、《湖南工业大学学报(社会科学版)》、《湖南冶金职业技术学院学报》)目前尚未在互联网上发布约稿信息和作出稿件处理承诺,作者据此投稿后果自负。征稿信息以正式刊登在我校上述3个学报上的征稿信息为准。

湖南工业大学期刊社网址: <http://www.hut.edu.cn/xb/>)

特此声明。

湖南工业大学期刊社

2009年01月05日