

# 无网格分析 Poisson 方程边值问题

杨芬<sup>1</sup>, 魏玉明<sup>1</sup>, 江宏<sup>2</sup>

(1. 常德职业技术学院, 湖南常德 415008; 2. 湖南工业大学管理科学与工程研究所, 湖南株洲 412008)

**摘要:** 通过耦合边界节点法和径向基函数, 无网格求解 Poisson 方程边值问题。把 Poisson 方程的解分解为齐次解和特解两部分, 用径向基函数逼近特解, 用边界节点法表示齐次解。叠加这两部分解的表达式, 使其在所有配置点满足控制方程和边界条件, 得到以待定系数为未知量的方程组。数值算例验证了该方法的可行性和有效性。

**关键词:** Poisson 方程; 边界节点法; 径向基函数; 无网格法

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2008)06-0016-04

## Non-Mesh Analysis for Poisson Equation Boundary Value Problems

Yang Fen<sup>1</sup>, Wei Yuming<sup>1</sup>, Jiang Hong<sup>2</sup>

(1. Changde Vocational and Technical College, Changde Hunan 415008, China; 2. Institute of Management Science and Engineering Research, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

**Abstract:** In view of couples boundary node method and radial basis functions, a non-mesh method was presented to solve Poisson equation boundary value problems. In this method, the solution of original equation decomposed into a particular solution and a solution of laplace equation. Then, the particular solution was approximated by a series of radial basis functions, and the corresponding homogeneous solution was represented by means of boundary node method. After coupling the two expressions of the solution and forcing the boundary conditions, the equations were obtained to determine the unknown coefficients. Numerical examples are presented to show the efficiency of the presented method.

**Key words** Poisson equation; boundary node method; radial basis function; non-mesh method

## 0 引言

无网格法是近年来兴起的一种数值计算方法, 它只需在计算区域或者边界上选取若干节点及其支撑基函数, 不需划分网格, 有其优点, 应用广泛。边界节点法(BNM)是一种将边界积分方程和移动最小二乘近似(MLS)<sup>[1]</sup>方案相结合的边界型无网格法。到目前为止, BNM只应用于求解 Laplace 问题<sup>[2, 3]</sup>和弹性力学问题<sup>[4]</sup>等不带有非齐次项的线性问题。

对 Poisson 问题, 采用传统边界元法(BEM)需计算在区域内的积分。文献[5, 6]提出 Dual Reciprocal BEM(DR-BEM)和 multiple reciprocal BEM(MR-BEM)把域

内积分转换成边界积分, 再对边界剖分单元。这两种方法虽然能处理非齐次问题, 但仍需在边界上划分网格, 这在处理复杂边界和移动边界问题、以及做自适应分析时要耗费很大的计算量。

文献[7, 8]通过在虚拟边界上选择配置点, 并在所有配置点上采用径向基函数(RBF)<sup>[9]</sup>作为支撑, 发展了一种求解 Poisson 方程的无网格法。该方法的求解精度严重依赖于虚拟边界和真实边界的距离, 该距离目前还没有理论上的最优值。本文直接在原有边界上选择配置点, 采用耦合 BNM 和 RBF 的方式来求解这类方程。该方法首先把 Poisson 方程的解分解为特解和齐

收稿日期: 2008-08-27

作者简介: 杨芬(1963-), 女, 湖南常德人, 常德职业技术学院讲师, 主要研究方向为微分方程;

魏玉明(1961-), 男, 湖南常德人, 常德职业技术学院高级讲师, 主要研究方向为建筑设计;

江宏(1981-), 男, 湖南常德人, 湖南工业大学硕士研究生, 主要研究方向为供应链管理。

次解两部分, 对满足有非齐次项的 Poisson 方程的特解在配置点上采用 RBF 逼近, 对满足 Laplace 方程边值问题的齐次解用 BNM 进行处理。然后, 叠加特解和齐次解得到通解表达式, 并让通解在所有配置点满足控制方程和边界条件, 得到待定未知量的代数方程组。最后通过具体的算例验证所提方法的可行性和有效性。

### 1 用 BNM 和 RBF 求解 Poisson 方程

设  $\Omega$  是  $R^2$  中具有光滑边界  $\Gamma$  的单连通区域, 对于如下 Poisson 方程

$$\Delta u = f(X), X = (x_1, x_2), \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

满足的边界条件是

$$\beta_1 u + \beta_2 q = g, \text{ on } \Gamma, \quad (2)$$

其中:  $\Delta$  是 Laplace 算子;  $f, g$  仅是坐标变量  $x_1, x_2$  的函数;  $q = \partial u / \partial n, n$  是边界单位外法向量;  $\beta_1, \beta_2(X) (i=1, 2)$  是已知系数。

把式 (1) 和式 (2) 的定解  $u$  分解成齐次方程解  $u_h$  和非齐次方程的特解  $u_p$ , 即

$$u = u_h + u_p, \quad (3)$$

那么  $u_p$  和  $u_h$  分别满足

$$\Delta u_p = f(X). \quad (4)$$

$$\text{和} \begin{cases} \Delta u_h = 0, & \text{in } \Omega, \\ \beta_1 u_h + \beta_2 q_h = g - (\beta_1 u_p + \beta_2 q_p), & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (5)$$

#### 1.1 用 RBF 逼近特解 $u_p$

以区域内选取的若干节点为中心, 用 RBF  $\{\phi_i\}$  逼近右端项  $f(X)^{[9]}$ , 即

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \phi_i(X), \quad (6)$$

其中:  $\alpha_i$  是未知系数;  $N$  是边界节点的数目;  $L$  是区域  $\Omega$  上的内点数目。

寻找对应于基函数  $\phi_i$  的特解  $v_i$ , 使得

$$\Delta v_i(X) = \phi_i(X), i = 1, 2, \dots, N+L, \quad (7)$$

把式 (7) 代入式 (6), 再根据方程 (4) 可得特解的表达式

$$u_p(X) = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i v_i(X). \quad (8)$$

在 DR-BEM 中, 常选用  $1+r_i$  作为 RBF, 其中  $r_i(X) = |X - Y_i|$  表示计算点  $X$  和节点  $Y_i$  之间的距离。本文将分别选取包括  $\phi_i=1+r_i$  在内的 3 种 RBF, 相应的 RBF 及其关于 Laplace 算子的特解见表 1。

#### 1.2 用边界节点法表示齐次解 $u_h$

Laplace 方程边值问题 (5) 的解的边界积分表达式为<sup>[2]</sup>:

$$\int_{\Gamma} (u_h(X) - u_h(Y)) q^*(X, Y) dS_X = \int_{\Gamma} q_h(X) u^*(X, Y) dS_X, \quad (9)$$

其中:  $u^*$  是 Laplace 算子的基本解;  $q^* = \partial u^* / \partial n_X, q_h = \partial u_h / \partial n$ 。

表 1 RBF  $\phi_i$  和相应的  $v_i$   
Tab. 1 RBF  $\phi_i$  and the corresponding  $v_i$

$\phi_i$	$v_i$
$1+r_i$	$\frac{r_i^2}{4} + \frac{r_i^3}{9}$
TPS: $r_i^2 \ln r_i$	$\frac{r_i^4}{16} \left( \ln r_i - \frac{1}{2} \right)$
$\frac{MQ}{\sqrt{r_i^2 + c^2}}$	$\frac{-c^3}{3} \ln \left( c\sqrt{r_i^2 - c^2} + c^2 \right) + \frac{1}{9} (r_i^2 + 4c^2) \sqrt{r_i^2 + c^2}$

在边界  $\Gamma$  上, 将未知变量  $u_h$  和  $q_h$  用 MLS 方案近似, 对计算点  $X$  (包括 Gauss 点和边界节点) 选取在其影响域内的弧长  $s$  作为参数, 即

$$u_h(s) = \sum_{i=1}^{NX} \psi_i(s) \tilde{u}_{h,i}, q_h(s) = \sum_{i=1}^{NY} \psi_i(s) \tilde{q}_{h,i}, \quad (10)$$

其中:  $\tilde{u}_{h,i}$  和  $\tilde{q}_{h,i}$  是节点值  $u_h(Y_i(s))$  和  $q_h(Y_i(s))$  在节点  $Y_i(s)$  的近似值;  $NX$  是计算点  $X(s)$  的影响域中节点的个数;  $\psi_i$  是边界节点  $Y_i(s)$  的 MLS 形函数, 形函数矩阵  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N]$

$$\Psi(s) = P^T(s) A^{-1}(s) B(s), \quad (11)$$

其中:  $P^T(s)$  是基函数, 本文选用  $P^T(s) = [1, s, s^2]$ ; 矩阵

$$A(s) = \sum_{i=1}^{NX} w_i(s) P^T(s_i) P^T(s_i),$$

$B(s) = [w_1(s) P(s_1), \dots, w_{N_x}(s) P(s_{N_x})]$ ,  $w_i(s)$  是权函数。

Gauss 型函数、指数函数、样条函数都可作为 MLS 中的权函数。文献[3]通过数值算例比较了这几种权函数对 BNM 精度的影响, 发现 Gauss 型函数最佳。因此

$$\text{本文选用 Gauss 型函数 } w_i(s) = \begin{cases} e^{-c|s-s_i|^d}, & d \leq 1, \\ 0, & d > 1, \end{cases}$$

式中:  $c$  是控制相对权重的参数, 并根据 Chati 等的工作取为  $0.4^{[3]}$ ;  $d = |X(s) - Y_i(s)| / d_i$ ,  $d_i$  是定义在边界节点  $Y_i(s)$  处的 RBF 的支撑域半径, Kothnur<sup>[4]</sup> 等人认为在 BNM 中, 计算点的影响域内应该包含 6~12 个边界节点, 因此本文将  $d_i$  取为  $3.5h$ , 其中  $h$  为相邻节点间最小距离。

以节点  $Y_i (i=1, \dots, N)$  作为配置点, 将式 (10) 代入式 (9), 并把边界离散成  $NC$  个背景网格, 得

$$\sum_{i=1}^{NC} \int_{r_i} \frac{\partial u^*(X, Y_i)}{\partial n_X} \left( \sum_{j=1}^{NX} \psi_j(X) \tilde{u}_{h,j} - \sum_{j=1}^{NY} \psi_j(Y_i) \tilde{q}_{h,j} \right) dS_X = \sum_{i=1}^{NY} \int_{r_i} u^*(X, Y_i) \sum_{j=1}^{NY} \psi_j(X) \tilde{q}_{h,j} dS_X, \quad (12)$$

其中  $NX, NY_i$  分别是计算点  $X$  和配置点  $Y_i$  支撑域中的节点数目。

方程 (12) 中左边的积分总是非奇异的, 可以用 Gauss 积分公式计算。对方程 (12) 右边的积分, 当  $Y_i \in \Gamma_i$  时, 是非奇异的; 当  $Y_i \in \Gamma_i^c$  时, 具有对数奇异性,

此时可用文献[2]中的方法将其转化为非奇异。

由于MLS插值缺乏 $\delta$ 函数的性质,因此不能通过将节点值取为边界给定值的方法引入边界条件。

### 1.3 组装系统方程组和处理边界条件

根据上述分析, Poisson 方程(1)的解可以表示为

$$u(X) = u_p(X) + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i v_i(X), X \in \bar{\Omega}, \quad (13)$$

$$q(X) = q_p(X) + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \frac{\partial v_i(X)}{\partial n}, X \in \Gamma, \quad (14)$$

$$\Delta u(X) = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \psi_i(X), X \in \bar{\Omega}, \quad (15)$$

其中 $w_i, \psi_i$ 由表1给出。当 $X \in \Gamma$ 时, $u_h$ 和 $q_h$ 的表达式见式(10);当 $X \in \Omega$ 时,

$$u_p(X) = \int_{\Gamma} q_p(Y) u^*(Y, X) dS_Y - \int_{\Gamma} u_p(Y) q^*(Y, X) dS_Y.$$

为了决定未知量 $\alpha_i, \tilde{u}_i$ 和 $\tilde{q}_i$ ,方程(15)必须在 $N+L$ 个配置点上满足控制方程(1);方程(13)和(14)必须在 $N$ 个边界节点上满足边界条件(2),即:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \psi_i(X_j) = f(X_j), X_j \in \bar{\Omega}, j=1, \dots, N+L, \\ \beta_1(X_j) \left( \sum_{i=1}^N \psi_i(X_j) \tilde{u}_i + \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i v_i(X_j) \right) + \\ \beta_2(X_j) \left( \sum_{i=1}^N \psi_i(X_j) \tilde{q}_i + \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial n}(X_j) \right) = \\ g(X_j), X_j \in \Gamma, j=1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

组装上述方程组和方程组(12),得

$$Kx = F, \quad (16)$$

其中未知向量 $x$ 包含 $3N+L$ 个未知量 $\alpha_i, \tilde{u}_i$ 和 $\tilde{q}_i$ 。

## 2 算例

在以下算例中,定义全局 $L_2$ 范数

$$e(u) = \frac{1}{|u|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} (u_i^{(e)} - u_i^{(n)})^2}$$

来度量误差<sup>[2]</sup>,其中 $N_i$ 为计算的内点数目,选取100个内点; $u_i^{(e)}$ 、 $u_i^{(n)}$ 分别为第 $i$ 个测试点的解析解和数值解; $|u|_{\max}$ 是 $u$ 在这 $N_i$ 个测试点上的解析解的最大值。

**例1**<sup>[11]</sup> 在正方形 $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ 内考虑 Poisson 方程 $\Delta u = 2e^{-x_2}$ ,以及解析解 $u = e^{-x_2} + e^{x_1} \cos x_2$ 。在边界上等距分布 $N$ 个边界节点,前 $N/4$ 个节点满足 Neumann 边界条件,后 $3N/4$ 个节点满足 Dirichlet 边界条件。内点和测试点均匀分布在 $\Omega$ 内的正方形网格上。

**例2**<sup>[5]</sup> 在椭圆 $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4\}$ 内考虑 Poisson 方程 $\Delta u = -x_1^2$ ,以及解析解

$$u = \frac{(-50x_1^2 + 8x_2^2 - 33.6)(0.25x_1^2 + x_2^2 - 1)}{246}.$$

在边界上等距分布 $N$ 个边界节点,前 $3N/4$ 个节点满足 Dirichlet 边界条件,后 $N/4$ 个节点满足 Neumann 边界条件。内点和测试点均匀分布在 $\Omega$ 内的正方形网格上。

1) 和 DR-BEM 的数值比较。

文献[5]通过选用 $1+r$ 作 RBF 逼近 Poisson 方程的右端项,用 DR-BEM 求解了算例2的 Dirichlet 边值问题。我们选取16个边界节点和17个内点比较本文方法和文献[5]的数值结果,结果见表2。从表2中可以看出,本文方法具有和 DR-BEM 同样的精度,这说明本文方法求解 Poisson 方程是可行的。

表2 数值结果比较

Tab. 2 Numerical results comparison

$x_1, x_2$	BNM			DR-BEM with	解析解
	$1+r$	TPS	$MQ(c=0.2)$	$1+r$	
0.00, 0.00	0.126	0.151	0.137	0.127	0.137
0.00, 0.45	0.092	0.118	0.104	0.092	0.104
0.30, 0.00	0.142	0.165	0.152	0.142	0.151
0.60, 0.45	0.134	0.159	0.145	0.135	0.144
0.90, 0.00	0.240	0.249	0.242	0.236	0.240
1.20, 0.35	0.225	0.224	0.221	0.220	0.220
1.50, 0.00	0.282	0.231	0.254	0.269	0.260

2) 收敛性分析。

为了研究本文方法的收敛性,定义如下的误差范数来度量收敛率:

$$R(e) = \frac{\log(e_{i-1}/e_i)}{\log(h_{i+1}/h_i)},$$

其中 $e_{i+1}$ 和 $e_i$ , $h_{i+1}$ 和 $h_i$ ,表示不同数目边界节点所对

应的误差和节点间距。收敛性结果见图1和图2,从中可以看出3种RBF的误差相差不大,但是TPS的收敛率最高, $1+r$ 的收敛率最低。

3) 稳定性分析。

对边界节点处的已知边界值 $u$ 和 $q = \partial u / \partial n$ 进行扰动 $\tilde{u} = u + \delta u$ , $\tilde{q} = q + \delta q$ ,其中 $\delta u$ 和 $\delta q$ 分别是平均值

为零、标准差为  $\sigma_k = \max_p |u| \times (p/100)$  和  $\sigma_y = \max |q| \cdot (p/100)$  的随机向量, 这里表示附加在边界数据上的扰动率。选取  $p=1, 2, 3, 4, 5$  对本文方法进行稳定性分析, 数值结果如图3和图4所示。从图中可以看出, 对算例1, 当用3种RBF逼近右端项时, 误差都是随着扰动率的增加而增加。由于算例1的误差都比较小, 所以虽然图3中误差在增加, 但是数值结果的变化并不大。对算例2, 当用3种RBF逼近右端项时, 误差变化都很小。这说明本文方法是稳定的。

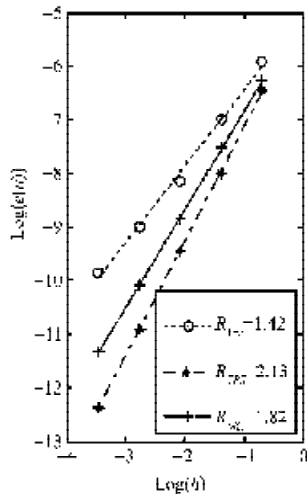


图1 算例1的收敛性  
Fig. 1 Convergence of calculating example 1

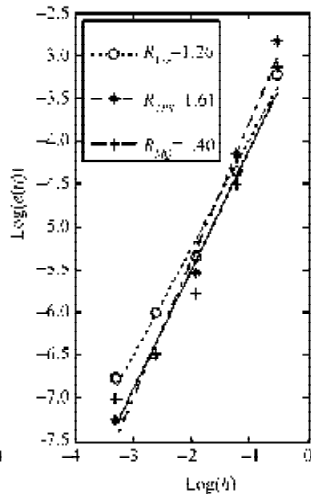


图2 算例2的收敛性  
Fig. 2 Convergence of calculating example 2

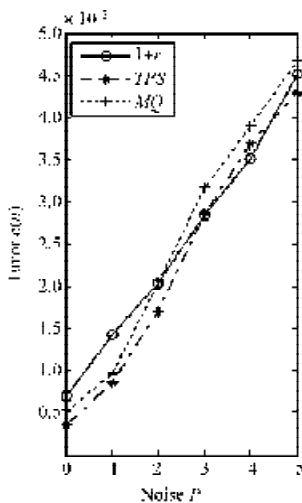


图3 算例1的稳定性  
Fig. 3 Stability of calculating example 1

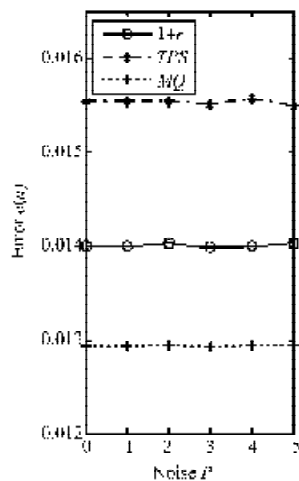


图4 算例2的稳定性  
Fig. 4 Stability of calculating example 2

### 3 结语

本文通过耦合BNM和RBF, 求解了Poisson方程边值问题。与DR-BEM和MR-BEM比较, 该算法是一种无网格法, 无需划分边界单元和剖分内部区域。选用了3种不同的RBF来比较求解的效果, 通过数值算例发现用3种RBF计算的结果差别很小, 但使用TPS函数时的效果最好且具有较高的收敛率和较好的稳定性, 所以无网格法是处理带有非齐次域内分布函数项问题的一种有效的解法。

#### 参考文献:

- [1] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] Mukherjee Y X, Mukherjee S. The boundary node method for potential problems[J]. Int J Num Meth Engng, 1997, 40: 797-815.
- [3] Chati M K, Mukherjee S. The boundary node method for three-dimensional problems in potential theory[J]. Int J Num Meth Engng, 2000, 47: 1523-1547.
- [4] Kothnur V S, Mukherjee S, Mukherjee Y X. Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method [J]. Int J Solids and Structures, 1999, 36: 1129-1147.
- [5] Partridge P W, Brebbia C A, Wrobel L C. The dual reciprocity boundary element method[M]. London: Computational Mechanics Publications, 1992.
- [6] Nowak A J, Brebbia C A. Numerical verification of the multiple reciprocity method for linear potential problems with body forces[J]. Engng Anal Bound Elem, 1992(10): 259-266.
- [7] Wang Hui, Qin Qing-Hua. A meshless method for generalized linear or nonlinear Poisson-type problems[J]. Engng Anal Bound Elem, 2006, 30: 515-521.
- [8] 赵新娟, 刘伟. 泊松问题的无网格解法[J]. 华北水利水电学院学报, 2005, 26(2): 71-74.
- [9] Golberg M A, Chen C S, Bowman H P A. Some recent results and proposals for the use of radial basis in the BEM [J]. Engng. Anal. Boundary Elem, 1999, 23: 285-296.
- [10] Cheng A H D, Lafe O, Grilli S. Dual reciprocity BEM based on global interpolation functions[J]. Engng. Anal. Boundary Elem, 1994, 13: 303-311.
- [11] Rodriguez J J, Power H. An adaptive dual reciprocity scheme for the numerical solution of the Poisson equation[J]. Engng. Anal. Boundary Elem, 2002, 26: 283-300.

(责任编辑: 罗立宇)