第22卷第6期
2008年11月

湖南工业大学学报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.22 No.6
Nov. 2008

矩阵在不等式证明中的妙用

韩 峰，向 翠

（湖南工业大学 师院校区 数学与计算机科学系，湖南 株洲 412007）

摘 要：矩阵是一种重要的数学方法，在数学领域有其独特的作用。根据正定实对称矩阵的一个重要不等式及均值不等式在矩阵方面的一个重要性质，对国际数学竞赛和不同书刊中有关不等式进行探讨。通过对比，体现了在解某类不等式问题时运用矩阵解题的优势。

关键词：正定实对称矩阵；矩阵不等式；均值不等式

中图分类号：O122.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)06-0013-03

On Magical Effect of Matrix in Inequality Proof

Han Feng，Xiang Cui

（Department of Maths and Computer Science, Teachers' college, Hunan University of Technology, Zhuzhou, Hunan 412007,China）

Abstract：Matrix, as an important mathematical means, plays a unique role in various fields of mathematics. On the basis of an important inequality of positive definite real symmetric matrices and a key feature of mean inequality in matrix., some related inequality proof which mentioned in international maths contests and various books are analyzed. By means of contrast, magic effect of matrix is reflected in certain kinds of inequality problems.

Key words：positive definite real matrix; matrix inequality; mean inequality; application

1 预备知识

1.1 矩阵不等式

方献亚在1985年第3期《数学通报》[1]“正定实对称矩阵的几个不等式”一文中，用数学归纳法证明了以下不等式：

设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，$\lambda,\mu>0$，则

$$\lambda|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{n}}+\mu|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}}\le|\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}},$$

当且仅当$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{B}(k>0)$时等号成立。

推论1 设$\lambda=\mu=1$得

$$|\boldsymbol{A}|^{\frac{1}{n}}+|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}}\le|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{n}},\qquad(1)$$

推论2 $$\lambda_1|A_1|^{\frac{1}{n}}+\cdots+\lambda_m|A_m|^{\frac{1}{n}}\le|\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_mA_m|^{\frac{1}{n}}.\qquad(2)$$

1.2 均值不等式及其推广[2]

给定正数序列$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则它们的算术平均值、几何平均值分别定义为：

$$A(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

则 $G(a_1, a_2, \cdots, a_n)\le A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，（3）

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立。

均值不等式的推广：设$n\times k$阶非负实数矩阵，各列的算术平均值依次记为A_1，A_2，$\cdots$，A_k，各行的几何平均值依次记为$G_1, G_2, \cdots, G_n$，则

$G(A_1, A_2, \cdots, A_k)\ge A(G_1, G_2, \cdots, G_n)$，（4）

当且仅当矩阵至少有一列为零或各行中对应数成比例时等式成立。

2 矩阵在不等式证明中的应用

2.1 推论1的应用

问题1 （1989年全国高中数学联赛试题）[3] 已知$a_1, a_2, \cdots, a_n$是正数，且满足$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$，证明

收稿日期：2008-08-12

作者简介：韩 峰（1963-），男，湖南茶陵人，湖南工业大学副教授，主要研究方向为抽象代数.

$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n$。

证明　设$A=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$，

显然，A，B为正定实对称矩阵。则

$$|A|^{\frac{1}{n}}=a_1a_2\cdots a_n=1,\ |B|^{\frac{1}{n}}=\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}=2,$$

由推论1得：

$$|A+B|^{\frac{1}{n}}=|(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)|^{\frac{1}{n}}\geq$$
$$|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}=1+2=3,$$
$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n。$$

对问题1，文献[3]利用拆项分组和平均不等式对上式进行了证明，对用式（1）方法而言要复杂得多，所以正确运用解题方法是顺利、快速解题的关键。

问题2　（第11届IMO试题）[3]　　证明：对所有满足$a_1>0, a_2>0, a_1b_1-c_1^2>0, a_2b_2-c_2^2>0$的实数$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$，有不等式

$$\frac{8}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2}\leq\frac{1}{a_1b_1-c_1^2}+\frac{1}{a_2b_2-c_2^2}$$成立，并求出其中等号成立的充要条件。

证明　令$A=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$，

则$A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & c_1+c_2 \\ c_1+c_2 & b_1+b_2 \end{pmatrix}$。

由$a_1>0, a_1b_1-c_1^2>0, a_2>0, a_2b_2-c_2^2>0$，可知$A$，$B$是正定实对称矩阵，$A+B$是正定实对称矩阵，于是

$$|A+B|^{\frac{1}{2}}=\left[(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$|A|^{\frac{1}{2}}=\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad |B|^{\frac{1}{2}}=\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由式（1）得：

$$|A|^{\frac{1}{2}}+|B|^{\frac{1}{2}}\leq|A+B|^{\frac{1}{2}},$$
$$\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left[(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}。$$

对上面的不等式两边同时平方得：

$$\left[\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\leq(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2,$$

因为$\left[\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left(a_1b_1-c_1^2\right)+\left(a_2b_2-\right.$

$$\left.c_2^2\right)+2\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\geq$$
$$4\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$4\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2,$$
$$\frac{1}{\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}\geq\frac{4}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2},$$

又因为

$$\left\{\left[\frac{1}{\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2+\left[\frac{1}{\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2\right\}\Big/2\geq$$
$$\frac{1}{\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

即$$\frac{1}{a_1b_1-c_1^2}+\frac{1}{a_2b_2-c_2^2}\geq\frac{2}{\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}\geq$$
$$\frac{8}{(a_1+a_2)(b_1+b_2)-(c_1+c_2)^2},$$

不等式得证。

当$\left(a_1b_1-c_1^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a_2b_2-c_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$时，等号成立。

即当$|A|=|B|$时，等号成立。

2.2　推论2的应用

问题3　（《奥赛训练教程》南京师范大学出版社P268（2））[3]　当$a_i, b_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，证明不等式$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\leq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$成立。

文献[4]中用均值不等式对此不等式进行了证明。

证明　由均值不等式得：

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i},\tag{5}$$
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i},\tag{6}$$

式（5）与式（6）相加得：

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}}\leq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{a_i+b_i}\right)=1,$$

所以$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}\leq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$。

笔者认为此证明过程较为复杂，经探讨知，可用文献[1]中的推论2进行证明。

证明　令$a_i>0, b_i>0, (i=1, 2, \cdots, n)$，

又令$X_1=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$，

则$X_1+X_2=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n+b_n \end{pmatrix}$，

所以有$|X_1|^{\frac{1}{n}}+|X_2|^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}$

$$|X_1+X_2|^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}。$$

由式（2）得：当$\lambda_1=\lambda_2$时有

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$ 。

2.3　推广式（4）的应用

问题 4 (第22届IMO试题)　　P 为 ΔABC 内的一点，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，点 P 到 ΔABC 的三边 BC，AC，AB 的距离分别为 d_1, d_2, d_3，证明

$$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2S_{\Delta ABC}}。$$

证明　由题给条件易知：$2S_{\Delta ABC}=ad_1+bd_2+cd_3$，

考虑矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_{3\times 2}=\begin{pmatrix} \frac{a}{d_1} & ad_1 \\ \frac{b}{d_2} & bd_2 \\ \frac{c}{d_3} & cd_3 \end{pmatrix}$，

由式（4）得：$A_1=\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)\cdot\frac{1}{3}$，

$A_2=\left(\frac{ad_1+bd_2+cd_3}{3}\right)$，

由推广式（4）可得：

$G(A_1, A_2) \ge A(G_1, G_2, G_3)$，

即 $\left(\dfrac{\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}}{3}\cdot\dfrac{ad_1+bd_2+cd_3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \ge$

$$\frac{\left(\frac{a}{d_1}ad_1\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b}{d_2}bd_2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{c}{d_3}cd_3\right)^{\frac{1}{2}}}{3},$$

对上式两边平方，整理得：

$$\left(\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3}\right)\cdot(ad_1+bd_2+cd_3) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{d_1}+\frac{b}{d_2}+\frac{c}{d_3} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2S_{\Delta ABC}},$$

结论得证。

问题 5　（1991年亚太地区数学竞赛试题）[5]　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \ge \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)。$$

证明

考虑矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_{n\times 2}=\begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{a_1+b_1} & a_1+b_1 \\ \frac{a_2^2}{a_2+b_2} & a_2+b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{a_n^2}{a_n+b_n} & a_n+b_n \end{pmatrix}$，

由均值不等式的推广式（4）得：

$$A_1=\frac{\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}}{n},$$

$$A_2=\frac{(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)}{n},$$

$$G_1=\left[\frac{a_1^2}{a_1+b_1}(a_1+b_1)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$G_n=\left[\frac{a_n^2}{a_n+b_n}(a_n+b_n)\right]^{\frac{1}{2}},$$

由推广式（4）得：$G(A_1, A_2) \ge A(G_1, \cdots, G_n)$，

即 $\left[\dfrac{\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}}{n}\cdot\dfrac{(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)}{n}\right]^{\frac{1}{2}} \ge$

$$\frac{\left[\frac{a_1^2}{a_1+b_1}(a_1+b_1)\right]^{\frac{1}{2}}+\cdots+\left[\frac{a_n^2}{a_n+b_n}(a_n+b_n)\right]^{\frac{1}{2}}}{n} \Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\right)2(a_1+\cdots+a_n)\right]^{\frac{1}{2}} \ge$$

$a_1+\cdots+a_n$，

两边平方并整理，得：

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n} \ge \frac{1}{2}(a_1+\cdots+a_n)。$$

由上可见：根据不等式的结构特点，构造出一个相应的矩阵，是解（证）不等式的一种有效方法。

参考文献：

[1]　方献亚. 正定实对称矩阵的不等式[J]. 数学通报，1985(3): 31.

[2]　施勒伊费尔 Φ T. 关于证明不等式的一种图表法[J]. 数学通报，1987(10)：30−32.

[3]　赵小云. 奥林匹克数学引论[M]. 南宁：广西教育出版社，2001.

[4]　曹瑞彬. 奥赛训练教程[M]. 南京：南京师范大学出版社，2004.

[5]　李泽然. 均值不等式的几个推广及应用[J]. 丹东师专学报，1995(1)：14−17.

（责任编辑：罗立宇）