

弹性四连杆机构动力学响应的数值求解

林国英, 李光, 刘少义

(湖南工业大学, 湖南 株洲 412008)

摘要: 针对弹性四连杆机构这一非线性动力学系统, 采用直接积分法中的 Wilson- θ 法对弹性四连杆机构的动力学响应进行求解。同时对其进行了相应的实验研究, 通过仿真与实验对比, 验证了 Wilson- θ 法求解非线性动力学模型的可行性。

关键词: 弹性四连杆; 数值求解; 动力学

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2008)04-0105-04

Numerical Solution of Dynamic Response for Elastic Four-Bar Linkage Mechanism

Lin Guoying, Li Guang, Liu Shaoyi

(Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

Abstract: As for nonlinear dynamic system, Wilson- θ technique is utilized to solve the dynamic response of elastic four-bar linkage. Besides, corresponding experiment is applied to verify the simulation result. Compared the simulation results with the experiment results, we can prove that the dynamic response by Wilson- θ is correct.

Key words: elastic four-bar linkage; numerical solution; dynamic

0 引言

弹性连杆机构的动力学方程, 一般为变系数线性或非线性的二阶常微分方程。对于此类系统, 目前还无法求出其解析解, 只能采用各种适当的数值方法求出其近似的数值解^[1]。从数值求解方面来说, 柔性连杆机构的动力学方程可分为刚性(病态)和非刚性方程两类。其中非刚性方程的数值求解比较容易, 可以选用显式Rung-Kutta法^[2]、Adams预估校正法^[3]、Wilson- θ 法和Newmark法等进行求解。其中前两种算法是比较经典的数值积分方法, 应用前需要预先将 n 个二阶形式的微分方程变换为 $2n$ 个一阶形式的微分方程。这样做所付出的代价是求解的方程数目增加了一倍, 这对于维数很高的二阶微分方程的求解来说是不利的。因此, 人们更关心无需经过降阶处理就可以直接求解二阶常微分方程组的算法。Wilson- θ 法和Newmark法正是应这种需要而发展起来的直接对二阶常微分方程(组)进行数值积分的方法。

1 Wilson- θ 法理论

逐步积分法是求解系统动力响应的直接积分方法, 它不需要求解振型和频率, 因此对各系数矩阵的形式没有限制。该算法的缺点是容易产生较大误差, 有时会出现数值不稳定现象。其基本思想是把时间离散化, 将本来要在任何时刻都应满足微分方程的解, 代之以只要在时间离散点上满足方程。而在逐步积分法中, 根据所取的假设不同, 常用的有线性加速度法, Wilson- θ 法及纽马克法。

由参考文献[4], 可以获得弹性四连杆机构的运动微分方程为:

$$M\ddot{U} - C\dot{U} + DU = P + Q, \quad (1)$$

式(1)中,

U 为系统的广义坐标列阵;

\dot{U} 为系统的广义坐标对时间的一阶导数列阵, 即弹性速度列阵;

收稿日期: 2008-05-05

作者简介: 林国英(1983-), 女, 江西南丰人, 湖南工业大学硕士研究生, 主要研究方向为包装机械设计理论及控制技术。

$\ddot{\mathbf{U}}$ 为系统的广义坐标对时间的二阶导数列阵，即弹性加速度列阵；

\mathbf{M} 为系统的质量矩阵，它是由各单元的质量矩阵装配而成的；

\mathbf{C} 、 \mathbf{D} 分别为系统的当量阻尼矩阵和当量刚度矩阵，分别由各个单元的当量阻尼矩阵和当量刚度矩阵装配而成；

\mathbf{P} 为系统在整体坐标系中的与牵连惯性力和哥氏惯性力相对应的广义力列阵；

\mathbf{Q} 为系统外力列阵，它的元素是真实地作用于弹性位移方向上的外力和作用于弹性转角上的外力矩。

式(1)是一个非线性变系数微分方程，本文采用 Wilson- θ 法对其进行求解。Wilson- θ 法假设在一个延伸步长 $\theta\Delta t$ 内 ($\theta > 1$)，加速度呈线性变化，如图1所示。

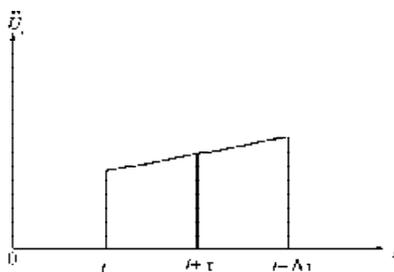


图1 加速度线性变化曲线

Fig.1 Change curve for linear acceleration

时刻 $t + \tau$ 的加速度为

$$\ddot{\mathbf{U}}(t + \tau) = \ddot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\tau}{\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) - \ddot{\mathbf{U}}(t)], \quad (0 \leq \tau \leq \theta\Delta t) \quad (2)$$

对式(2)积分可得

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{U}}(t) + \tau \ddot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) - \ddot{\mathbf{U}}(t)], \quad (3)$$

再积分一次得

$$\mathbf{U}(t + \tau) = \mathbf{U}(t) + \tau \dot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\tau^3}{2} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\tau^5}{6\theta\Delta t} [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) - \ddot{\mathbf{U}}(t)], \quad (4)$$

令 $\tau = \theta\Delta t$ ，则有

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) = \dot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\theta\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + \ddot{\mathbf{U}}(t)], \quad (5)$$

$$\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) = \mathbf{U}(t) + \theta\Delta t \dot{\mathbf{U}}(t) + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + 2\ddot{\mathbf{U}}(t)]. \quad (6)$$

由式(5)、(6)可求出用位移向量 $\mathbf{U}(t + \theta\Delta t)$ 表示的

$\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t)$ 和 $\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t)$ 的表达式：

$$\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} [\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) - \mathbf{U}(t)] - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{U}}(t) - 2\ddot{\mathbf{U}}(t), \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) = \frac{3}{\theta\Delta t} [\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) - \mathbf{U}(t)] - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{U}}(t) - 2\dot{\mathbf{U}}(t). \quad (8)$$

在 $t + \theta\Delta t$ 时刻，系统动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) = \mathbf{P}(t + \theta\Delta t) + \mathbf{Q}(t + \theta\Delta t), \quad (9)$$

将式(7)、(8)代入式(9)，整理后可得

$$\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t + \theta\Delta t), \quad (10)$$

式(10)中，

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + a_6 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C};$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t + \theta\Delta t) = \mathbf{P}(t + \theta\Delta t) + \mathbf{Q}(t + \theta\Delta t) -$$

$$\mathbf{M} [a_4 \mathbf{U}(t) + a_5 \dot{\mathbf{U}}(t) + 2\ddot{\mathbf{U}}(t)] +$$

$$\mathbf{C} [a_1 \mathbf{U}(t) + 2\dot{\mathbf{U}}(t) + a_2 \ddot{\mathbf{U}}(t)].$$

其中 $a_6 = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2}$, $a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}$, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}$ 。

解线性方程组(10)，可得出 $\mathbf{U}(t + \theta\Delta t)$ ；将 $\mathbf{U}(t + \theta\Delta t)$ 代

入式(7)便可得到 $\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t)$ ；然后将 $\dot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t)$ 分别

代入式(2)~(4)并令 $\tau = \Delta t$ ，可得如下结果：

$$\ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = a_4 [\mathbf{U}(t + \theta\Delta t) - \mathbf{U}(t)] + a_5 \dot{\mathbf{U}}(t) - a_6 \ddot{\mathbf{U}}(t),$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{U}}(t) + a_7 [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + \ddot{\mathbf{U}}(t)],$$

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{U}}(t) + a_8 [\ddot{\mathbf{U}}(t + \theta\Delta t) + 2\ddot{\mathbf{U}}(t)].$$

其中 $a_4 = \frac{a_6}{\theta}$, $a_5 = -\frac{a_1}{\theta}$, $a_6 = 1 - \frac{\theta}{3}$, $a_7 = \frac{\Delta t}{2}$, $a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$ 。

当 $\theta \geq 1.37$ 时，Wilson- θ 法是无条件稳定的；若 $\theta = 1$ ，便是普通线性加速度法； $\theta = 2$ 则是双步长法。

2 数值算例

2.1 Wilson- θ 法仿真

下面以弹性曲柄摇杆机构(其结构如图2所示)为例，仿真分析其动态响应。机构各构件的参数选取如下：曲柄长度 $l_1 = 40$ mm，连杆长度 $l_2 = 190$ mm，摇杆长度 $l_3 = 50$ mm，机架长度 $l_4 = 190$ mm，其中曲柄与摇杆均为圆盘，直径分别为 $D_1 = D_2 = 115$ mm，厚度为 $h_1 = 12$ mm， $h_3 = 12$ mm。连杆截面为矩形，厚度为 $h_2 = 2$ mm，宽度 $b_2 = 8$ mm，材料均为钢。铰链 A、B 处均有一集中质量 0.01 kg。材料的密度为 $\rho = 7.85 \times 10^3$ (kg/m³)，弹性模量为 $E = 2.11 \times 10^{11}$ (N/m²)。

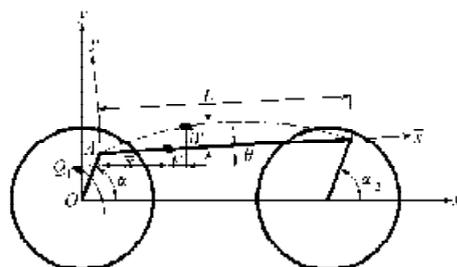


图2 曲柄摇杆机构结构示意图

Fig.2 Structure graph of linkage mechanism

在本文的研究中, 由于曲柄和摇杆是圆盘状, 而连杆为细长杆状, 因此, 仅把连杆看成是弹性体, 曲柄及摇杆则视为刚性体, 在选取广义坐标量时, 在曲柄和摇杆与机架铰链联结处只需设置一个广义坐标量。而把连杆划分成4个单元, 每个单元节点上取4个广义坐标量, 在与刚性曲柄及摇杆相连的两点上, 由于是刚性联接, 不考虑其轴向与横向位移, 只考虑转角及曲率两个广义量。而控制输入力矩是实验所测得的电机输入力矩, 这样就保证了实验与仿真的输入力矩相一致。其有限元程序简要流程图如图3所示。

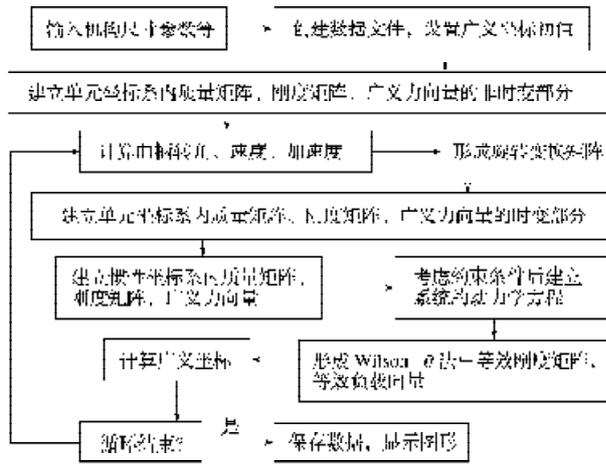


图3 有限元程序简要流程图
Fig. 3 Flow diagram of FEM

图4为曲柄在恒定的转速下, 由于连杆中存在弹性变形引起的摇杆转角变化曲线。从图4中可以看出, 摇杆的弹性转角大约为0.016 rad, 即约1°。但随着曲柄转速的提高, 弹性响应会相应地增大, 即所表现出的弹性特性会越来越明显, 从而影响了输出摇杆的位置精度。因此, 随着连杆机构向高速化发展, 抑制机构中的弹性变形就显得更为重要。

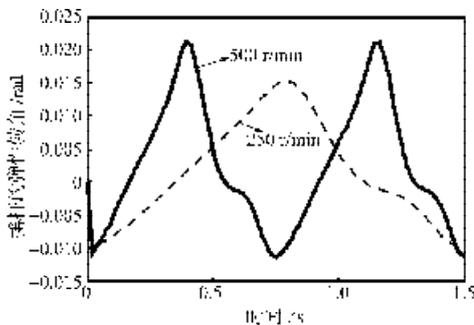


图4 摇杆的弹性转角
Fig. 4 Flexible angle of a rocker

2.2 实验验证

为了验证仿真中求解响应结果的正确性, 进行如

下相应的实验研究, 曲柄摇杆机构实验台如图5所示。

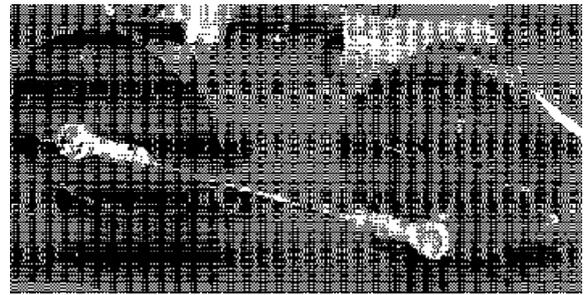


图5 曲柄摇杆实验台
Fig. 5 Experimental table of a crank-rocker

数值仿真与实验时采用的是相同的输入力矩, 如图6所示。而力矩的测量是在电动机的线路上串联一电阻, 通过测量电阻的电流, 再进行相应的转换得到的, 具体的转换关系式如下:

$$T = 9549 \frac{P}{\omega}$$

$$P = U \times I$$

其中, P 为电动机的功率;

ω 为电机转数;

U 为电动机额定电压;

I 为电动机的输入电流。

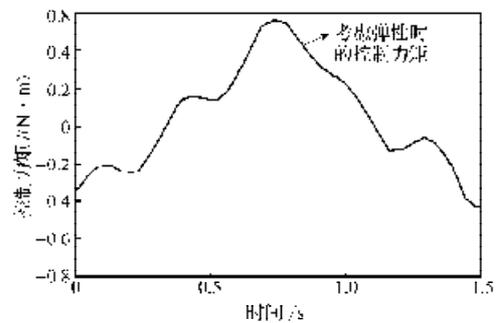


图6 控制输入力矩
Fig. 6 Controlling input torque

电动机的输入电流采用示波卡3050B与计算机相联进行数据采集, 取采集时间为50 ms, 总共取6帧, 每帧有20个采集点, 串联的电阻值为1.18 Ω。采集卡采集到的数据经Matlab程序读出, 就可得到实验中摇杆的弹性转角曲线图, 然后将得到的摇杆的弹性应变曲线图与仿真结果图进行对比, 如图7所示。从图7中可看出, Wilson-θ法的仿真结果与实验结果很接近, 误差值大约为 2×10^{-3} rad, 从而验证了求解响应结果的正确性。

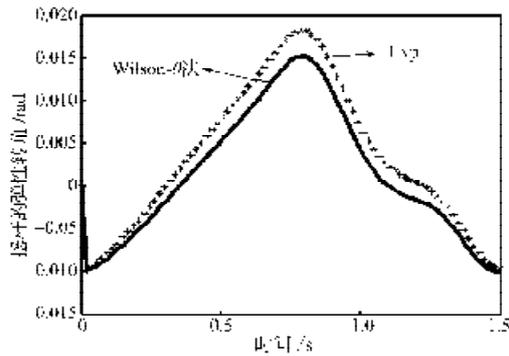


图7 摇杆弹性角位移曲线

Fig. 7 Flexible angular displacement of the rocker

3 结语

由于弹性连杆机构的动力学方程中存在一些耦合项,这使得系统方程更为复杂,不能用传统的方法来求解^[5]。因此,本文采用直接积分法来对这一复杂的耦合非线性微分方程进行求解。针对一平面四连杆机构,在曲柄以一恒定转速运动的情况下,进行了数值仿真,结果显示,当把连杆视为弹性体后,输出摇杆

存在一定的弹性应变。且随着机构向高速化方向发展,机构中摇杆的弹性特性会显现得更加明显。此外,通过对曲柄摇杆机构进行相应的实验研究,验证了直接积分法求解响应结果的正确性。

参考文献:

- [1] 冯志华,胡海岩. 高速机构动力学研究进展[J]. 力学进展, 2002, 32(2): 196-204.
- [2] 刘德贵,费景高. 动力学系统数字仿真算法[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [3] 张铁,闫家斌. 数值分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2000.
- [4] 张策,黄永强,王子良,等. 弹性连杆机构的分析与设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.
- [5] 赵玉成,王跃社,张亚红,等. 柔性曲柄摇杆机构的动力学分析及实验研究[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(7): 710-714.

(责任编辑: 廖友媛)

(上接第 104 页)

3 结论

本文利用 CFD 思想,借助 Fluent 分析软件对淹没条件下前混和磨料水射流进行了数值模拟,结果表明:合适的喷嘴结构可改善混砂效果,提高淹没射流性能;锥直型喷嘴要好于圆锥型喷嘴,且对于 26° 、 45° 、 60° 3 种内锥度的锥直型喷嘴,以 26° 效果最好;磨料射流经过喷嘴的过程中,磨粒加速及衰减规律与射流束变化规律并不一致,磨粒速度最大值出现在距喷嘴一定靶距处。在喷嘴内射流束与磨粒均被加速,由于存在的滑移,磨料的速度小于射流束的速度;当磨料射流由喷嘴喷出后,磨粒速度随靶距增大先增大后减小,故对淹没磨料射流存在一最优靶距。仿真为喷嘴结构的优化设计提供了依据。

参考文献:

- [1] Wang J. Abrasive Waterjet Machining of Engineering Materials [M]. Switzerland: Trans Tech Publications, 2003.

- [2] Andreas W, Momber, Wong YatC, et al. Surface profiling of low-carbon steel with supersonic waterjets[J]. Wear, 2002, 249: 853-859.
- [3] Osman A H. Experimental analysis of high-speed air-water jet flow in an abrasive water jet mixing tube[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2004, 15: 37-48.
- [4] 陈春,聂松林,吴正江,等. 高压水射流的 CFD 仿真及分析[J]. 机床与液压, 2006(2): 103-105.
- [5] 高激飞,胡寿根,宁原林. 基于 CFD 的淹没磨料射流的数值模拟与流动特性研究[J]. 中国机械工程, 2003, 14(14): 1188-1191.
- [6] Fluent Inc. FLUENT User's Guide[EB/OL]. [2007-12-23]. <http://bbs.proe.cn/download/2007/1223/74504.html>.
- [7] 黄克智,薛明德,陆明万. 张量分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [8] 王福军. 计算流体动力学分析——CFD 软件原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

(责任编辑: 张亦静)