第22卷第4期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.22 No.4
2008年7月 Journal of Hunan University of Technology July 2008

一类平面微分系统的定性分析

刘兴国，吕　勇

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：对一类平面微分系统进行了定性分析：利用奇点理论分析了平衡点的性态，借助Dulac函数法讨论了闭轨的不存在性，利用Hopf分支理论分析得到了极限环存在性的若干充分条件，利用Л.А.Черкас 和Л.И.Ж.илевыч的唯一性定理分析得到了极限环唯一性和稳定性的若干充分条件。

关键词：平面系统；极限环；存在性；唯一性

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)04-0017-05

Qualitative Analysis for a Class of Planar Differential Systems

Liu Xingguo，Lv Yong

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China；）

Abstract：According to the qualitative analysis of a class of planar differential systems, the properties of equilibrium points are analyzed by the singular point theory, and the non-existence of closed orbit is discussed in view of Dulac function. Then after Hopf bifurcation theory, some sufficient conditions for the existence of limit cycles are obtained. Furthermore, with the theorem of Л. А.Черкас and Л.И.жилевыч, some sufficient conditions for the uniqueness and stability for limit cycles of such systems are gained.

Key words：planar system；limit cycle；existence；uniqueness

0　引言

自Poincaré发现极限环以来，极限环问题的研究便受到众多国内外数学工作者的高度关注，尽管Hilbert第16问题至今仍然悬而未解，但在众多数学工作者的共同努力下，在关于极限环存在性、唯一性、分布、分支问题及实际问题数学模型的定性分析等方面的研究中，已经取得了丰富的成果[1-3]。近年来，人们对平面高次系统或一般平面微分系统极限环的研究日渐增多[4-10]，但是对于高次多项式系统或一般的平面自治系统中心焦点的判定是个既困难又麻烦的问题。同时，在极限环唯一性的讨论中，因相关条件不便验正，Л.А.Черкас 和 Л.И.Жилевыч的唯一性定理较少被人们利用。本文讨论如下一类平面微分系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\left(1+x^2\right)\equiv P(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\delta y+ax^2+bxy+\lambda\dfrac{x^4}{1+x^2}y=Q(x,y)。\end{cases}\quad(1)$$

式（1）中，δ、a、b、c、λ为常数。我们运用形式级数法对系统 $(1)|_{\lambda=0}$ 进行了细焦点的判定，借助Dulac函数法讨论了闭轨的不存在性，根据Hopf分支理论分析，得到了极限环存在性的充分条件，通过变换将系统转化为Liénard方程，再通过构造对比系统来验证Л.А.Черкас和 Л.И.Жилевыч的极限环唯一性定理中所要求的条件，然后依据该唯一性定理分析建立了极限环唯一性与稳定性的若干充分条件。

收稿日期：2008-05-13

作者简介：刘兴国（1966-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学教授，主要从事微分方程理论及应用方面的教学与研究.

1 平衡点的性态

引理 1 当$\delta \neq 0$时，则有：

Ⅰ）若$a=0$，则系统（1）的奇点仅有O（0, 0），且$-2<\delta<0$时O（0, 0）为稳定的粗焦点，$0<\delta<2$时O（0, 0）为不稳定的粗焦点；

Ⅱ）若$a \neq 0$，则系统（1）的奇点有O（0, 0）和$N\left(\dfrac{1}{a},0\right)$，且$O$点性态同Ⅰ），$N$是（1）的鞍点。

当$\delta=0$时，显然O（0, 0）是系统（1）所对应线性系统的中心，采用基于Poincaré思想的形式级数法可得引理2。

引理 2 对于系统（1），当$\delta=0$时，则有：

Ⅰ）若$ab>0$，则O（0, 0）为一阶不稳定细焦点；

Ⅱ）若$ab<0$，则O（0, 0）为一阶稳定细焦点；

Ⅲ）若$ab=0$，$\lambda>0$，则O（0, 0）为二阶不稳定细焦点；

Ⅳ）若$ab=0$，$\lambda<0$，则O（0, 0）为二阶稳定细焦点；

Ⅴ）若$ab=0$，$\lambda=0$，则O（0, 0）为中心。

证明 当$\delta=0$时，令

$$F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots,$$

其中$F_k(x,y)=\sum\limits_{i+j=k} a_{ij}x^i y^j$是$x$与$y$的$k$次齐次式（$k$=3, 4,⋯），当$|x|<1$时，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(y+x^2y\right)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left[-x+ax^2-bxy+\lambda x^4y+x^4y\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i x^{2i}\right], \tag{2}$$

令式（2）右端的3次项为0，有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_3}{\partial y}+2y\left(ax^2+bxy\right)=0,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去r^3后可得$\dfrac{\mathrm{d}F_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a\cos^2\theta\sin\theta+2b\cos\theta\sin^2\theta$,

从而可取

$$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=-\frac{2}{3}a\cos^3\theta+\frac{2}{3}b\sin^3\theta,$$

即$F_3(x,y)=-\dfrac{2}{3}ax^3+\dfrac{2}{3}by^3$。

令式（2）右端的4次项为0，有

$$y\frac{\partial F_4}{\partial x}+2x^3y-x\frac{\partial F_4}{\partial y}+\left(ax^2+bxy\right)\frac{\partial F_3}{\partial y}=0,$$

即$x\dfrac{\partial F_4}{\partial y}-y\dfrac{\partial F_4}{\partial x}=2abx^2y^2+2x^3y-2b^2xy^3$。

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去r^4化简得

$$D_4=\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2ab\cos^2\theta\sin^2\theta+2\cos^3\theta\sin\theta+2b^2\cos\theta\sin^3\theta。$$

下面分3种情形来讨论：

1）当$ab \neq 0$时，因为

$$\int_0^{2\pi}D_4\mathrm{d}\theta=2ab\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \neq 0,$$

改取F_4满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=D_4-C_4。$$

其中$C_4=\dfrac{ab}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且$C_4$与$ab$同号。

设$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=C_4r^4+O\left(r^4\right),$$

从而当$ab>0$时，O（0, 0）为一阶不稳定细焦点，当$ab<0$时，O（0, 0）为一阶稳定细焦点。

2）当$ab=0$，$\lambda \neq 0$时，则有

$$F_4=-\frac{2}{4}x^4-\frac{2}{4}b^2y^4,$$

令式（2）右端的5次项为0，有

$$y\frac{\partial F_5}{\partial x}+x^2y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_5}{\partial y}+\left(ax^2+bxy\right)\frac{\partial F_4}{\partial y}=0,$$

化简得

$$x\frac{\partial F_5}{\partial y}-y\frac{\partial F_5}{\partial x}=-2ax^4y+2b^3xy^4,$$

可得$F_5(x,y)=\dfrac{2}{5}ax^5+\dfrac{2}{5}b^3y^5$。

令式（2）右端的6次项为0，有

$$y\frac{\partial F_6}{\partial x}+x^2y\frac{\partial F_4}{\partial x}-x\frac{\partial F_6}{\partial y}+\left(ax^2+bxy\right)\frac{\partial F_5}{\partial y}+2\lambda x^4y^2=0,$$

化简得

$$x\frac{\partial F_6}{\partial y}-y\frac{\partial F_6}{\partial x}=2\lambda x^4y^2+2b^4xy^5-2x^5y,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去r^6化简得

$$D_6=\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2\lambda\cos^4\theta\sin^2\theta+2b^4\cos\theta\sin^5\theta-2\cos^5\theta\sin\theta,$$

因为当$\lambda \neq 0$时

$$\int_0^{2\pi}D_6\mathrm{d}\theta=2\lambda\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \neq 0。$$

改取F_6满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=D_6-C_6,$$

其中$C_6=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且$C_6$与$\lambda$同号。

设$\Psi(x,y)=x^2+y^2+F_3-F_4+F_5+F_6$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=C_6r^6+O(r^6)。$$

所以当$ab=0,\lambda>0$时，$O(0,0)$为2阶不稳定细焦点，当$ab=0,\lambda<0$时，$O(0,0)$为2阶稳定细焦点。

3）当$ab=0,\lambda=0$时，

①若$a=\lambda=0$，则有

$P(-x,y)=P(x,y)$，$Q(-x,y)=-Q(x,y)$；

②若$b=\lambda=0$，则有

$P(x,-y)=-P(x,y)$，$Q(x,-y)=Q(x,y)$。

由对称原理知$O(0,0)$为$(1)|_{\delta=0}$中心。

2　极限环的存在唯一性与稳定性

定理1　下列条件之一成立时，系统（1）在全平面上不存在闭轨：

Ⅰ）$\delta>0$，$ab\geq0$，$\lambda\geq0$；

Ⅱ）$\delta<0$，$ab\leq0$，$\lambda\leq0$；

Ⅲ）$\delta\geq0$，$ab>0$，$\lambda\geq0$；

Ⅳ）$\delta\leq0$，$ab<0$，$\lambda\leq0$；

Ⅴ）$\delta\geq0$，$ab\geq0$，$\lambda>0$；

Ⅵ）$\delta\leq0$，$ab\leq0$，$\lambda<0$。

证明　当$b\neq0$时，令$L(y)=by-1=0$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}L(y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\delta+abx^2+\lambda\frac{x^4}{1+x^2},$$

于是可知$y=\frac{1}{b}$是系统（1）于定理相应条件下的无切直线，取Dulac函数$B(x,y)=(1+x^2)^{-1}(by-1)^{-1}$（当$b=0$时取$B(x,y)=-(1+x^2)^{-1}$），则

$$\mathrm{div}(BP,BQ)|_{(1)}=$$
$$(1+x^2)^{-1}(by-1)^{-2}\left(\delta+abx^2+\lambda\frac{x^4}{1+x^2}\right)。$$

因为在定理的条件之一成立时，上式定号且其零值仅在$x=0$处取得，所以在定理条件之一成立时，系统(1)在全平面上不存在闭轨。

定理2　当$\delta=0$，$ab=0,\lambda=0$时，系统（1）在全平面上不存在极限环。

证明　由定理2的证明可知，此时$\mathrm{div}(BP,BQ)|_{(1)}\equiv0$，因而系统（1）在全平面上可能存在闭轨，但不存在极限环。

引理3　在系统（1）包围奇点$O(0,0)$的闭轨存在区域中，总有$ax<1$。

证明　对系统（1）而言，当$a\neq0$时，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{1-ax=0}=y\left(1+\frac{1}{a^2}\right),$$

由此可知，直线$1-ax=0$被系统（1）的鞍点$N\left(\frac{1}{a},0\right)$所分割成的两段是无切的，故系统（1）的包围奇点$O(0,0)$的闭轨不能与直线$1-ax=0$相交，否则此闭轨将包围指数为+1的奇点$O(0,0)$与鞍点$N\left(\frac{1}{a},0\right)$，这是不可能的，所以包围奇点$O(0,0)$的闭轨若存在，则当$a>0$时，它必位于直线$1-ax=0$的左方；当$a<0$时，它必位于直线$1-ax=0$的右方，无论哪种情况发生，在包围原点的闭轨存在的区域中均有$ax<1$，当$a=0$时结论自然成立。

定理3　下列条件之一成立时，系统（1）在$O(0,0)$外围至少存在一个极限环，且$\delta<0$时所产生的环不稳定，$\delta>0$时所产生的环稳定。

Ⅰ）$ab>0$，$-1\ll\delta<0$；

Ⅱ）$ab<0$，$0<\delta\ll1$；

Ⅲ）$ab=0$，$\lambda>0$，$-1\ll\delta<0$；

Ⅳ）$ab=0$，$\lambda<0$，$0<\delta\ll1$。

证明　在定理的条件Ⅰ）或Ⅲ）下，系统$(1)|_{\delta=0}$以$O(0,0)$为不稳定细焦点。而当$-1\ll\delta<0$时，系统（1）以$O(0,0)$为稳定粗焦点。当δ从0开始减小时，系统（1）的奇点$O(0,0)$由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点。根据Hopf分支理论知，系统（1）于相应参数条件下，在点$O(0,0)$外围至少产生一个不稳定的极限环。

在定理的条件Ⅱ）或Ⅳ）下，系统$(1)|_{\delta=0}$以$O(0,0)$为稳定细焦点。而当$0<\delta\ll1$时，系统（1）以$O(0,0)$为不稳定粗焦点。当δ从0开始增大时，系统（1）的奇点$O(0,0)$由稳定的细焦点变为不稳定的粗焦点。根据Hopf分支理论知，系统（1）于相应参数条件下，在点$O(0,0)$外围至少产生一个不稳定的极限环。

定理4　下列条件之一成立时，系统（1）在$O(0,0)$外围至多存在一个极限环，且当$\delta<0$时，若存在极限环则不稳定；$\delta>0$时，若存在极限环则稳定。

Ⅰ）$ab>0$，$\lambda=0$，$-\frac{b}{a}<\delta<0$；

Ⅱ）$ab<0$，$\lambda=0$，$0<\delta<-\frac{b}{a}$；

Ⅲ）$ab>0$，$\lambda>0$，$-\frac{b}{a}\leq\delta<0$；

Ⅳ）$ab<0$，$\lambda<0$，$0<\delta\le -\dfrac{b}{a}$；

Ⅴ）$a=0$，$\lambda>0$，$\delta<0$；

Ⅵ）$a=0$，$\lambda<0$，$\delta>0$。

证明 在时间变换 $\mathrm{d}\tau=\left(1+x^2\right)\mathrm{d}t$ 下，系统（1）可化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-\dfrac{x-ax^3}{1+x^2}+y\dfrac{\delta+bx+\lambda\dfrac{x^4}{1+x^2}}{1+x^2}。\end{cases}\tag{2}$$

于是可知式（2）等价于下列形式的Liénard方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\delta+bx-\lambda\dfrac{x^4}{1+x^2}}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}+\frac{x-ax^2}{1+x^2}=0。\tag{3}$$

将式（3）进一步写成下面的等价形式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\phi(y)-F(x),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=g(x)。\end{cases}\tag{4}$$

其中：

$\phi(y)=y$；

$g(x)=\left(x-ax^2\right)\left(1-x^2\right)^{-1}$；

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^x\frac{\delta+bu-\lambda\dfrac{u^4}{1+u^2}}{1+u^2}\mathrm{d}u。$$

则有 $f(x)$，$g(x)$，$\phi(y)$ 连续可微，$\phi(y)=y$ 单调递增，且有

$y\phi(y)=y^2>0,\quad y\neq 0$；

$f(0)=F'(0)=-\delta$。

由引理3知，在包围原点的极限环存在的区域中总有 $ax<1$，从而

$xg(x)=x^2(1-ax)\left(1+x^2\right)^{-1}>0,\ x\neq 0$。

当 $\lambda\neq 0$ 时，取

$$f_1(x)=f(x)+g(x)[0+0F(x)]=f(x)=-\frac{\delta+bx+\lambda\dfrac{x^4}{1+x^2}}{1+x^2}，$$

则 $f_1(\pm\infty)=-\lambda$，又 $f_1(0)=f(0)=-\delta$，此时若 λ 与 δ 异号时，则必存在 $x_1<0<x_2$，使得 $f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$。若 $f_1(x)=0$ 有多个根，则取 x_1 为最大的负根，x_2 为最小的正根，则在区间 $[x_1,x_2]$ 上，当 $\delta<0$ 且 $\lambda>0$ 时 $f_1(x)\ge 0$，当 $\delta>0$ 且 $\lambda<0$ 时 $f_1(x)\le 0$。系统（1）亦可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\left(1+x^2\right)\equiv P(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x(1-ax)-f(x)\left(1+x^2\right)y\equiv Q(x,y)。\end{cases}\tag{5}$$

而当 $f_1(x)-f(x)\equiv 0$ 时，系统（1）变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\left(1+x^2\right)=P_1(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x(1-ax)=Q_1(x,y)。\end{cases}\tag{6}$$

易算得 $PQ_1-P_1Q=y^2\left(1+x^2\right)^2f_1(x)$，而当 $x\in[x_1,x_2]$ 且 f_1（1）定号时，此时 PQ_1-P_1Q 亦定号，从而当 $x\in[x_1,x_2]$ 时系统（1）的闭轨线与系统（6）的闭轨线必重合或不相交。显然，系统（1）的闭轨线与系统（6）的闭轨线不重合，从而在带域 $x_1\le x\le x_2$ 中，系统（1）与系统（6）的闭轨不能相交。而当 $a=0$ 时，原点是系统（6）唯一的奇点，且为中心，系统（6）的闭轨自然充满带域 $x_1\le x\le x_2$；当 $a\neq 0$ 时，原点为系统（6）的中心，$N\left(\dfrac{1}{a},0\right)$ 为系统（6）的鞍点，只要当 $a<0$ 时 $\dfrac{1}{a}<x_1$，而当 $a>0$ 时 $x_2<\dfrac{1}{a}$，则系统（6）的闭轨将充满带域 $x_1\le x\le x_2$。若系统（1）的闭轨线不完全包含区间 $[x_1,x_2]$，则系统（1）经过区间 $[x_1,x_2]$ 上任一点的闭轨必与系统（6）的闭轨相交，得出矛盾。因而系统（1）的闭轨若存在，则必包含上述条件下的区间 $[x_1,x_2]$。

当 $\lambda=0$ 时，取

$$f_1(x)=f(x)+g(x)[b+0F(x)]=-\frac{abx^2+\delta}{1+x^2}，$$

则 $f_1(\pm\infty)=-ab$，又 $f_1(0)=f(0)=-\delta$，此时若 ab 与 δ 异号，则必存在 $x_1<0<x_2$，使得 $f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$，且在区间 $[x_1,x_2]$ 上，当 $\delta<0$ 且 $ab>0$ 时 $f_1(x)\ge 0$，当 $\delta>0$ 且 $ab<0$ 时 $f_1(x)\le 0$。类似上面的方法分析可知，系统（1）的闭轨若存在，则必包含相应条件下的区间 $[x_1,x_2]$。

记 $T_1=-\lambda\dfrac{x^4}{\left(1+x^2\right)^2}\left[1+x^2+2(1-ax)\right]$，

$T_2=-abx^2-2a\delta x+\delta$，

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\lambda\dfrac{x^4}{1+x^2}+bx+\delta}{ax^2-x}\right)=\frac{T_1+T_2}{\left(ax^2-x\right)^2}。$$

则 $\mathrm{sgn}\,T=\mathrm{sgn}\left(T_1+T_2\right)$，由引理3知 $ax<1$，从而 $\mathrm{sgn}\,T_1=-\mathrm{sgn}\,\lambda$。$T_2$ 为一元二次三项式，其二次项系数为 $-ab$，其根的判别式为 $\Delta=4\delta\left(a^2\delta+ab\right)$，则当 $ab>0$ 且 $\Delta\le 0$ 时，$T_2\le 0$；当 $ab<0$ 且 $\Delta\le 0$ 时，$T_2\ge 0$。

结合以上分析，再根据Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的唯一性定理，我们有：

①当定理的条件Ⅰ）或Ⅲ）或Ⅴ）成立时，$T_1=0$，$T_2<0$或$T_1<0$，$T_2\le 0$或$T_1<0$，$T_2<0$，均有$T<0$，从而$\frac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$内单调不增，且$f(0)>0$，所以系统（1）在O（0, 0）点外围至多存在一个不稳定的极限环。

②当定理的条件Ⅱ）或Ⅳ）或Ⅵ）成立时，$T_1=0$，$T_2>0$或$T_1>0$，$T_2\ge 0$或$T_1>0$，$T_2>0$，均有$T>0$，从而$\frac{f_1(x)}{g(x)}$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$内单调不减，且$f(0)<0$，所以系统（1）在O（0, 0）点外围至多存在一个稳定的极限环。定理证毕。

由定理3与定理4易得下面的定理5。

定理5　下列条件之一成立时，系统（1）在O（0, 0）外围存在唯一极限环，且当$\delta<0$时所存在的极限环不稳定，$\delta>0$时所存在的极限环稳定。

Ⅰ）$ab>0$，$\lambda=0$，$-\frac{b}{a}<\delta<0$，$|\delta|<<1$；

Ⅱ）$ab<0$，$\lambda=0$，$0<\delta<-\frac{b}{a}$，$|\delta|<<1$；

Ⅲ）$ab>0$，$\lambda>0$，$-\frac{b}{a}\le\delta<0$，$|\delta|<<1$；

Ⅳ）$ab<0$，$\lambda<0$，$0<\delta<-\frac{b}{a}$，$|\delta|<<1$；

Ⅴ）$a=0$，$\lambda>0$，$-1<<\delta<0$；

Ⅵ）$a=0$，$\lambda<0$，$0<\delta<<1$。

注：在定理4与定理5的条件中，同时要求：当$a<0$时，$\frac{1}{a}<x_1$；当$a>0$时，$x_2<\frac{1}{a}$，其中在定理的条件Ⅰ）与Ⅱ）中，x_1与x_2分别为方程$-\frac{abx^3+\delta}{1+x^2}=0$于定理相应条件下的负根与正根；在定理的条件Ⅲ）与Ⅳ）中，x_1与x_2分别为方程$f(x)=-\left(\delta+bx+\lambda\frac{x^3}{1-x^2}\right)(1+x^2)^{-1}=0$于定理相应条件下最大的负根与最小的正根。

参考文献：

[1] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985.

[2] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1995.

[3] Jaume Giné. On some open problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem[J]. Chaos, Solitons and Fractals，2007，31(5)：1118-1134.

[4] 刘兴国，黄立宏. 一类平面多项式系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报（A辑），2007，22(4)：455-461.

[5] 马知恩. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 数学年刊，1986，7A(1)：1-6.

[6] Lawrence M Perko，Shü Shih-Lung. Existence, uniqueness, and nonexistence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane[J]. Journal of Differential Equations，1984，53 (2)：146-171.

[7] Timoteo Carletti，Gabriele Villari. A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2005，307(2)：763-773.

[8] Davidson F A，Xu R，Liu J. Existence and uniqueness of limit cycles in an enzyme-catalysed reaction system[J]. Applied Mathematics and Computation，2002，27(2-3)：165-179.

[9] Zheng Zuo-Huan. On the limit cycles for a class of planar systems[J]. Nonlinear Analysis，1995，24(4)：605-614.

[10] Zhang P G，Zhao S Q. Existence and Uniqueness of Limit Cycles for a Class of Normal Form Equations with Codimension Two Singularities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1993，172(1)：191-204.

（责任编辑：廖友媛）