数学期望的计算方法与技巧

肖文华

（娄底职业技术学院 电子信息工程系，湖南 娄底 417000）

摘　要：利用数学期望的定义、性质、公式、随机变量分布的对称性，以及母函数、特征函数等，探讨了数学期望的几种计算方法。

关键词：数学期望；定义；性质；公式；微分法

中图分类号：O211；G642　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)03-0098-03

Calculating Methods and Techniques for Mathematical Expectation

Xiao Wenhua

（Department of Electronics and Information Engineering，Loudi Vocational Technical College，Loudi Hunan 417000，China）

Abstract: Some calculating methods for mathematical expectation are discussed by making use of the definition, nature and formula of mathematical expectation, the symmetry of random variable distribution, generating function and characteristic function.

Key words: mathematical expectation; definition; nature; formula; differential method

数学期望是概率论的重要内容之一，由于随机变量的分布形式不同，数学期望的求法也就不同，即使是同种分布，其解法也多种多样，技巧性较强，因此，探讨数学期望的计算方法和计算技巧有着重要意义。

1　直接利用定义求解[1]

用定义直接求数学期望是求期望最基本的方法，在求数学期望时，常会用到一些特殊的无穷级数的求和公式，如 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$，$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\left(|x|<1\right)$ 等，利用这些公式及它们的各种变形，往往会使计算变得简单。

例1　设 x 服从参数为 p 的几何分布，求 $E(x)$。

解　$E(x)=\sum_{i=1}^{\infty}ip(x=i)=\sum_{i=1}^{\infty}ip(1-p)^{i-1}=p\sum_{i=1}^{\infty}i(1-p)^{i-1}$。

为了求级数 $\sum_{i=1}^{\infty}i(1-p)^{i-1}$，可作如下考虑：

由于 $\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}\left(|x|<1\right)$，

利用和函数的可微性对此级数逐项求导，可得

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(x^k\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1},$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$，

从而 $E(x)=p\sum_{i=1}^{\infty}i(1-p)^{i-1}=p\cdot\frac{1}{[1-(1-p)]^2}=\frac{1}{p}$。

2　利用数学期望的性质求解[2]

直接求一个随机变量的数学期望比较因难时，将该随机变量分成若干个比较容易求出数学期望的随机变量之和，然后利用数学期望的性质来解决原来那个随机变量的数学期望的求解问题，常用的公式为 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$。特别是常把复杂的随机变量分解成若干个服从贝努利分布的随机变量之和，即设

$$x_i=\begin{cases}0, & \text{概率为 } q_i;\\ 1, & \text{概率为 } p_i;\end{cases}\quad p_i+q_i=1(i=1,2,\cdots,n)。$$

易得，若 $y=\sum_{i=1}^{n}x_i$，且 x_1，x_2，…，x_n 相互独立，

收稿日期：2008-03-27

作者简介：肖文华（1968-），女，湖南娄底人，娄底职业技术学院讲师，主要从事高等数学，概率论与数学统计的教学和研究.

则 $E(y)=\sum_{i=1}^{n}P_i$。

例 2　有一类有奖销售，每 1 袋封闭包装的食品中放 1 张赠券，n 张不同赠券为 1 套，收集齐 1 套可获重奖。试求为集齐 N 张赠券所需购买的食品袋数 X 的数学期望。

解　以 Y_j 记从收集到第 $j-1$ 张之后到收集到第 j 张赠券所需购买的食品袋数，显然，对一切 $j=1,2,\cdots,N$, Y_j 服从 $p_j=\frac{N-j+1}{N}$ 的几何分布，即

$$p\{Y_j=k\}=(1-p_j)^{k-1}p_j,\ k=1,2,\cdots,N。$$

从而 $E(Y_j)=\frac{1}{p_j}=\frac{N}{N-j+1}, j=1,2,\cdots,N$。

因此 $E(X)=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots+E(Y_N)=$

$$N\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)\sim N\ln N。$$

特别地，为集齐水浒 108 将的画卡，平均需购 $108\times \ln 108=505.67$ 袋食品。

点评　利用变量分解技巧，可大大降低题目的难度，很容易得到结论。

3　利用“佚名统计学家公式”求解[3]

设（X, Y）是连续型随机变量，其概率密度为 $p(x,y)$，$z=g(x,y)$ 为分段连续函数，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为：

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

特殊地：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)\mathrm{d}y。$$

这些公式姑且称为“佚名统计学家公式”。

例 3　设随机变量（X, Y）服从二元正态分布，其密度函数为 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$-\infty<x, y<+\infty$。

令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，Z 的分布被称为瑞利分布，求 Z 的数学期望。

解　利用佚名统计学家公式，可得

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underset{y=r\sin\theta}{\overset{x=r\cos\theta}{=\!=}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r=$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=$$

$$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}。$$

4　利用分布的对称性求解[4]

当分布律或分布密度函数具有对称性时，随机变量取值的集中位置就是对称中心。尤其当随机变量服从均匀分布时，其取值的对称中心非常容易得到，由此得到数学期望。

例 4　若 X_1，X_2，…，X_n 为正的独立随机变量，服从相同分布，试证明 $E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}$。

证明　由对称性知 $\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n}$，$\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n},\cdots,\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}$ 同分布，故

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\cdots=E\left(\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)。$$

而 $E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=1$,

故 $E\left(\frac{X_i}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$。

因此，由数学期望的可加性知

$$E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}。$$

点评　利用对称性与数学期望的可加性使本题证明简洁。

5　利用条件期望公式求解[5]

利用条件期望公式 $E(X)=\sum_j E(X/Y=y_j)P(Y=y_j)$ 或 $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)P(y)\mathrm{d}y$，可得数学期望。

例 5　求 n 次贝努里试验中，事件 A 发生的次数 S_n 的数学期望。其中事件 A 在每次贝努里试验中发生的概率为 p。

解　令 $Y_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 次试验中 } A \text{ 发生；}\\0,\text{其它，}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则 $S_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$。

以第一次试验的结果为条件，由条件期望公式得：

$$E(S_n)=P(Y_1=0)E(S_n|Y_1=0)+p(Y_1=1)E(S_n|Y_1=1),$$

则 $ES_n(1-P)E(S_{n-1})-P\left[1+E(S_n-1)\right]=$

$$P+E(S_{n-1})=\cdots=(n-1)P-E(S_1)=np。$$

点评 利用条件期望公式简化数学期望计算的关键，是要找到合适的作为条件的随机变量。

6 利用特征函数求解

计算随机变量的特征函数$f(t)=E\left(e^{itX}\right)$比直接计算$E(X)$要简单，此时可以考虑先算出特征函数，再利用它与数学期望的关系，求出数学期望本身。

随机变量X的特征函数定义为：

$$f(t)=Ee^{itX}\begin{cases}\sum_i e^{itx_i}P(X=x_i)(X\text{为离散型时})；\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{itX}p(x)\mathrm{d}x\big(X\text{为连续型时，}\\ \qquad p(x)\text{为}X\text{的分布密度函数}\big)。\end{cases}$$

则 $E\left(X^k\right)=\frac{1}{i^k}f^{(k)}(0)$。特别地，$E(X)=\frac{1}{i}f'(0)$。

例 6 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$。

解 由$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可求得X的特征函数$f(t)$为：

$$f(t)=E\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itX}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}。$$

所以

$$E(X)=\frac{1}{i}\left[e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\right]'\Bigg|_{t=0}=\frac{1}{i}\left[\left(i\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 2t\right)e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\right]\Bigg|_{t=0}=\mu。$$

7 利用母函数法求解

当随机变量为离散型时，则用母函数求数学期望更为方便，由于随机变量ξ母函数的定义为$\phi(s)=\sum_i p_is^i$，且有性质$E(\xi)=\phi'(1)$，若ξ的数学期望存在，只须对它的母函数求一阶导数即可。

例 7 求普哇松分布的数学期望。

解 因为普哇松分布的母函数$\phi(s)=e^{\lambda(s-1)}$，所以$E(\xi)=\phi'(1)=e^{\lambda(s-1)}\cdot\lambda\big|_{s=1}=\lambda$。

8 利用微分法求解

若随机变量的分布律中含有参数，可对分布律的性质$\sum_i p_i=1$两边关于参数求导来达到目的。

例 8 设随机变量ξ服从几何分布$g(k,p)$，求$E(\xi)$。

解 因为$p(\xi=k)=p(1-p)^{k-1}$ $(0<p<1,k=1,2,\cdots)$，根据分布律的性质得$\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=1$。

两边对p求导数，得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-p)^{k-1}-p(k-1)(1-p)^{k-2}\right]=0,$$

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}-\frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}+\frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=0,$$

即 $\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}E(\xi)+\frac{1}{1-p}=0$，因此$E(\xi)=\frac{1}{p}$。

9 结语

以上讨论了几种简化计算数学期望的方法和技巧，但不是全部，在此不再列举。不过，我们在计算随机变量X的数学期望时，要注意：对于离散型随机变量X的数学期望，其数值是级数的和，而且数学期望完全是由X的分布列确定，而不受X的可能取值的排列次序的影响，因此，要求级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$绝对收敛，若级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$不是绝对收敛，则其数学期望不存在。对于连续型随机变量X的数学期望，其数值是积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$的值，若该积分不是绝对收敛，则其数学期望也不存在。

总之，只要对数学期望的基本定义和随机变量分布形式的特点有了透彻的理解，那么，对各种简化计算方法和技巧的应用就会游韧有余了。

参考文献：

[1] 杨向群. 线性代数与概率统计[M]. 长沙：湖南大学出版社，2005.

[2] 陈 魁. 应用概率统计[M]. 北京：清华大学出版社，1999.

[3] 李贤平，沈崇圣，陈子毅. 概率论与数学统计[M]. 上海：复旦大学出版社，2003.

[4] 覃光莲. 数学期望的计算方法探讨[J]. 高等理科教育，2006(5)：27-28.

[5] 赵 强. 离散随机变量数学期望的几种求法[J]. 玉林师范学院学报，2006(3)：55-56.

（责任编辑：廖友媛）