第22卷第2期 湖南工业大学学报 Vol.22 No.2
2008年3月 Journal of Hunan University of Technology Mar. 2008

离散动态系统稳定与不稳定的代数判据

龙瑞仙，刘建州

（湘潭大学 数学与计算机科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘　要：首先指出相关文献结果中的几个错误，并对其进行了修正。进一步利用矩阵特征值界的估计，获得了区间矩阵及离散动态系统稳定、不稳定和混合稳定的一些简单实用的判据，并通过实例说明结果的有效性。

关键词：离散动态系统；渐近稳定性；区间矩阵；特征值分析；离散稳定；混合稳定；离散不稳定

中图分类号：O231；TP13　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1673-9833(2008)02-0035-05

Algebraic Criteria for Stability and Instability of Discrete Dynamic Systems

Long Ruixian，Liu Jianzhou

（School of Math. and Computational Science, Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China）

Abstract: Some mistakes of the main results in the recently research have been pointed out and then modified. Further, by using the technique of matrix eigenvalues boundary, some simple and applicable algebraic criteria of the stability, the instability and the mixed stability for the interval matrices and discrete dynamic systems have been gained. Finally, the effectiveness of the results are illustrated by numerical examples.

Key words: discrete dynamic systems; asymptotic stability; interval matrices; eigenvalues analysis; discretely stability; discretely instability; mixed stability

文献[1-4]讨论了不确定离散动态系统的渐近稳定性问题，给出了一些稳定与不稳定的代数判据。文献[3]将非负区间矩阵的结果推广到一般区间矩阵上，建立了新的判据。本文的主要目的是指出文献[3]的一些判据中存在的不妥之处，并对某些错误判据作了修正。并在文献[1-3]的基础上，运用矩阵特征值界的估计分析技巧与非负矩阵最大特征值的估计，提出了简单实用的离散动态系统稳定、不稳定和混合稳定的新的充分条件。

1　问题、概念和引理

本文考虑的不确定离散动态系统为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(\otimes)\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0。\tag{1}$$

式（1）中：$\boldsymbol{A}(\otimes)$为$n\times n$阶实矩阵，它的元素$\otimes_{ij}$（i，j=1，2，…，n）不确知，但知其下界p_{ij}和上界q_{ij}，即：

$$p_{ij}\le\otimes_{ij}\le q_{ij}。\tag{2}$$

$\boldsymbol{x}(k)$为k时刻的状态向量，k为非负整数。记

$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{n\times n}$，

$$N[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]=\left\{\boldsymbol{A}:(a_{ij})_{n\times n},\ p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n\right\}。\tag{3}$$

称$N[\boldsymbol{P}，\boldsymbol{Q}]$为区间矩阵，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$为它的下界阵和上界阵。按上述文献可得如下两个确定矩阵：

$$\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{n\times n},\quad m_{ij}=\max\left\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\right\}；\tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}}=(\bar{m}_{ij})_{n\times n},\quad \bar{m}_{ij}=\min\left\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\right\}。\tag{5}$$

定义1[1]　称方阵$\boldsymbol{A}$是离散稳定的，若它的谱半径$\rho(\boldsymbol{A})<1$；称区间矩阵$N[\boldsymbol{P}，\boldsymbol{Q}]$离散稳定，若对任意$\boldsymbol{A}\in N[\boldsymbol{P}，\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{A}$是离散稳定的；若区间矩阵$N[\boldsymbol{P}，\boldsymbol{Q}]$离散稳定，则称系统（1）渐近稳定。

定义2[1]　称区间矩阵$N[\boldsymbol{P}，\boldsymbol{Q}]$完全离散不稳定，

收稿日期：2008-03-15
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671164），湖南省教育厅重点资助项目（06A070）
作者简介：龙瑞仙（1977-），女，湖南益阳人，湘潭大学硕士研究生，主要研究方向为控制理论与应用.

若对任意$A\in N[P,Q]$，A不是离散稳定的（即$\rho(A)\geq 1$）；若区间矩阵$N[P,Q]$完全离散不稳定，则系统（1）不稳定。

定义 3[3] 称区间矩阵$N[P,Q]$是离散混合稳定的，如果存在$A,B\in N[P,Q]$，使得A是离散稳定的，而B不是离散稳定的（即$\rho(B)\geq 1$）；若区间矩阵$N[P,Q]$是离散混合稳定的，则称系统（1）是渐近混合稳定的。

一个方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为非负的（正的），如果$a_{ij}\geq 0$（$a_{ij}>0$）对一切$i,j=1,2,\cdots,n$成立；称$A\geq B\geq 0$ $(A>B>0)$，当且仅当 $a_{ij}\geq b_{ij}\geq 0\,(a_{ij}>b_{ij}>0)$ 对一切$i,j=1,2,\cdots,n$。这里$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$0=(0_{ij})_{n\times n}$为零矩阵。

由矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的元素取模（实数即为绝对值）后所得的元素构成的矩阵，称为A的模阵，记作$|A|=(|a_{ij}|)_{n\times n}$。

引理 1[5] 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$，若$|A|\leq B$，则$\rho(A)\leq\rho(B)$。

引理 2[6] 1）对任何非负矩阵A与B，若$0\leq A\leq B$，则$\rho(A)\leq\rho(B)$；

2）对任何矩阵A，有$\rho(A)\leq\rho(|A|)$。

引理 3[7] 如果A是有最大特征值r的非负矩阵，其行和为$r_1,r_2,\cdots,r_n$，则$\min\limits_{1\leq i\leq n} r_i\leq r\leq\max\limits_{1\leq i\leq n} r_i$。

2 对文献[3]中某些结论的商榷

文献[3]揭示了混合稳定的意义，将原来的两视角（稳定与不稳定）扩大为三视角。本节将先举出相应反例，指出文献[3]中的定理2~6和推论1中的某些结论不成立，并对这些错误结论作出了修正。文献[3]给出了如下一些结论：

结论 A （文献[3]中的定理2）若$\rho(\bar{M})\geq 1$，则系统(1)混合稳定，当且仅当区间矩阵$N[P,Q]$含有零矩阵$0=(0_{ij})_{n\times n}$，即$0\in N[P,Q]$。

结论 B （文献[3]中的定理3）若$0\in N[P,Q]$，则系统(1)为不稳定，当且仅当$\rho(\bar{M})\geq 1$。

结论 C （文献[3]中的推论1）如果$0\in N[P,Q]$，则系统(1)为不稳定，当且仅当$\rho(P)\geq 1$，$\rho(Q)\geq 1$。

结论 D （文献[3]中的定理4）系统(1)渐近稳定，当且仅当$\rho(P)<1$，$\rho(Q)<1$。

结论 E （文献[3]中的定理5）如果$|P|\leq|Q|$，则：

1）系统(1)渐近稳定的充要条件是 $\rho(Q)<1$；

2）当$0\in N[P,Q]$时，系统（1）不稳定的充要条件是$\rho(P)\geq 1$。

结论 F （文献[3]中的定理6）如果$|P|\geq|Q|$，则：

1)系统（1）渐近稳定的充要条件为$\rho(P)<1$；

2)当 $0\in N[P,Q]$ 时，系统（1）不稳定的充要条件是$\rho(Q)\geq 1$。

首先，我们举反例说明以上这些结论不正确：

例 1 取$P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$，则有$\bar{M}=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$，$\rho(\bar{M})=1.5\geq 1$，显然$N[P,Q]$不含零矩阵，但可取$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，$\rho(A)=0.5<1$，即$A$是离散稳定的，从而有系统（1）是混合稳定的。结论A不成立。

产生错误的原因是：文献[3]的作者在证明中错误地认为：区间矩阵$N[P,Q]$不含零矩阵，则必有$P>0$或者$Q<0$。但$N[P,Q]$不含零矩阵，P、Q中所有元素不一定都为正或者都为负。从文献[3]的证明过程知：文献[3]中的结论B~F产生错误的原因是一样的，以下不再一一赘述。

例 2 取 $P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 0.9\end{pmatrix}$，显然$\rho(\bar{M})=1.5\geq 1$且$0\in N[P,Q]$，但可取$A=\begin{pmatrix}0.8 & 0\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，而$\rho(A)=0.8<1$，即$A$是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定的。结论B不成立。

例 3 取 $P=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 0.9\end{pmatrix}$，满足$\rho(P)=3\geq 1$，$\rho(Q)=1.5\geq 1$，且$0\in N[P,Q]$，但可取$A=\begin{pmatrix}0.6 & 0\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，有$\rho(A)=0.8<1$，即$A$是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定。结论C不成立。

例 4 取$P=\begin{pmatrix}-1 & 0.8\\ -0.5 & 0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}0 & 0.8\\ 0.5 & 0\end{pmatrix}$，由计算易知$\rho(P)<0.82<1$，$\rho(Q)<0.64<1$，但可取$A=\begin{pmatrix}-1 & 0.8\\ 0.4 & 0\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，而$\rho(A)>1.25\geq 1$，即$A$不是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定的。结论D不成立。

例5 取$P=\begin{pmatrix}-1 & -0.8\\ -0.5 & 0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}-1 & 0.8\\ -0.5 & 0\end{pmatrix}$，满足$|P|\leq|Q|$，由计算易知$\rho(Q)<0.82<1$，但$\rho(P)>1.31\geq 1$，

即P不是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定的。结论E中的1）不成立。

例6　取$P=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}2.5 & 0\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}$，满足$|P|\le|Q|$，$0\in N[P,Q]$且$\rho(P)=2\ge1$，但可取$A=\begin{pmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & 0.6\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，则$\rho(A)=0.6<1$，即$A$是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定的。结论E中的2）不成立。

例7　取$P=\begin{pmatrix}-1 & 0.8\\ -0.5 & 0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1 & 0.8\\ 0.4 & 0\end{pmatrix}$，满足$|P|\ge|Q|$，$\rho(P)<0.82<1$，而$\rho(Q)>1.25\ge1$，即$Q$不是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定。结论F中的1）不成立。

例8　取$P=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -0.8\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -0.2\end{pmatrix}$，满足$|P|\ge|Q|$，$0\in N[P,Q]$，且$\rho(Q)=2\ge1$，但可取$A=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & -0.2\end{pmatrix}\in N[P,Q]$，易知$\rho(A)=0.5<1$，即$A$是离散稳定的，从而系统（1）是混合稳定的。结论F中的2）不成立。

以下我们将修正文献[3]结论中的一些错误：

定理1　设区间矩阵$N[P，Q]$含有零矩阵，且$\rho(\bar{M})\ge1$，则系统（1）是混合稳定的。

证明　因为$0\in N[P,Q]$，则$\rho(0)<1$，即零矩阵是离散稳定的。但另一方面，由于$\bar{M}=(\bar{m}_{ij})_{n\times n}$，$\bar{m}_{ij}=\min\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\}$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，有$|p_{ij}|\ge|\bar{m}_{ij}|=\bar{m}_{ij}$，$|q_{ij}|\ge|\bar{m}_{ij}|=\bar{m}_{ij}$，即$|P|\ge\bar{M}$，$|Q|\ge\bar{M}$，而$\rho(\bar{M})\ge1$，依引理2有$\rho(|P|)\ge\rho(\bar{M})\ge1$，$\rho(|Q|)\ge\rho(\bar{M})\ge1$，且由$0\in N[P，Q]$，有$P\le0\le Q$，从而$\rho(P)\ge1$与$\rho(Q)\ge1$至少有一个成立，亦即$P$与$Q$至少有一个不稳定，依定义3，系统（1）为渐近混合稳定。

定理2　若$P\ge0$，则系统（1）不稳定的充要条件为$\rho(P)\ge1$。

证明　必要性显然，下证充分性：$\forall A\in N[P,Q]$，因为$P\ge0$，则有$Q\ge A\ge P\ge0$，而$\rho(P)\ge1$，根据引理2有$\rho(A)\ge\rho(P)\ge1$。由A的任意性，可知系统（1）不稳定。

定理3　若$Q\le0$，则系统（1）不稳定的充要条件为$\rho(Q)\ge1$。

证明　必要性显然，下证充分性：$\forall A\in N[P,Q]$因为$Q\le0$，则有$-P\ge-A\ge-Q\ge0$，根据引理2有$\rho(-A)\ge\rho(-Q)$，而$\rho(A)=\rho(-A)$，$\rho(Q)=\rho(-Q)$，则$\rho(A)\ge\rho(Q)\ge1$。即A为离散不稳定，由A的任意性，可知系统（1）不稳定。

定理4　当区间矩阵含有零矩阵时，如果$|P|\le|Q|$，系统（1）渐近稳定的充要条件为$\rho(Q)<1$。

证明　必要性显然，下证充分性：因为$0\in N[P，Q]$，即$P\le0\le Q,\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in N[P,Q]$，有$p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij}$，因为$|P|\le|Q|$，从而$|a_{ij}|\le\max\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\}=|q_{ij}|$，根据引理1有$\rho(A)\le\rho(|Q|)=\rho(Q)<1$。由$A$的任意性，可知系统（1）渐近稳定。

定理5　当区间矩阵含有零矩阵时，如果$|P|\ge|Q|$，系统（1）渐近稳定的充要条件为$\rho(P)<1$。

证明　必要性显然，下证充分性：因为$0\in N[P，Q]$，即$P\le0\le Q,\forall A=(a_{ij})_{n\times n}\in N[P,Q]$，有$p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij}$，因为$|P|\ge|Q|$，从而$|a_{ij}|\le\max\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\}=|q_{ij}|$，于是根据引理1有$\rho(A)\le\rho(|P|)=\rho(-P)=\rho(P)<1$，由$A$的任意性，可知系统（1）渐近稳定。

3　几个新的判据

在上一节所给出的判别法中，要计算矩阵的谱半径，当矩阵是大型矩阵时，这是不容易的。以下，我们根据已知矩阵的元素，经过简单的计算，给出一些简单实用的判据。

定理6　如果$|P|\le|Q|$，则

1）$\rho(|Q|)<1$时系统（1）渐近稳定；

2）当$\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}q_{ij}<1$（或$\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}q_{ij}<1$）时系统（1）渐近稳定。

证明　1）任取$A=(a_{ij})_{n\times n}\in N[P，Q]$，有$p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij}$，因为$|P|\le|Q|$，从而$|a_{ij}|\le\max\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\}=|q_{ij}|$，根据引理1有$\rho(A)\le\rho(|Q|)<1$。由$A$的任意性，可知系统（1）渐近稳定。

2）任取$A=(a_{ij})_{n\times n}\in N[P，Q]$，有$p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij}$，因为$|P|\le|Q|$，从而$|a_{ij}|\le\max\{|p_{ij}|,|q_{ij}|\}=|q_{ij}|$，又因为$\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}q_{ij}<1$，根据引理1和引理3有$\rho(A)\le\rho(|Q|)<1$，由$A$的任意性，可知系统（1）渐近稳定。

定理7　设$|P|\le|Q|$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，$|q_{ij}|\le\dfrac{1}{n}$，且其

中至少一个不等号严格成立时系统（1）渐近稳定。

证明 任取$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in N[P,Q]$，有$p_{ij}\le a_{ij}\le q_{ij}$，因为$|P|\le|Q|$，从而$\left|a_{ij}\right|\le\max\left\{\left|p_{ij}\right|,\left|q_{ij}\right|\right\}=\left|q_{ij}\right|$，而$\left|q_{ij}\right|\le\frac{1}{n}$，对$A$的任意特征值$\lambda_i(A),i=1,2,\cdots,n$，由Schur不等式[8]和引理1，有$\left|\lambda_i(A)\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i(A)\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|q_{ij}\right|^2<1$，即$\rho(A)<1$。由$A$的任意性，可知系统（1）渐近稳定。

用类似于定理6的方法，有：

定理8 如果$|P|\ge|Q|$，则

1）当$\rho(|P|)<1$时，系统（1）渐近稳定；

2）当$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|p_{ij}\right|<1$（或$\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|p_{ij}\right|<1$）时，系统（1）渐近稳定。

定理9 设$|P|\ge|Q|$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，$\left|p_{ij}\right|\le\frac{1}{n}$，且其中至少一个不等号严格成立时，系统（1）渐近稳定。

定理10 设$P\ge 0$，如果$\min_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\ge 1$），则系统（1）不稳定。

证明 任取$A\in N[P,Q]$，因为$P\ge 0$，有$A\geqslant P\geqslant 0$，根据引理2和引理3，有$\rho(A)\ge\rho(P)\ge\min_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\ge 1$，由$A$的任意性，可知系统（1）不稳定。

推论1 设$Q\le 0$，如果$\min_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|q_{ij}\right|\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|q_{ij}\right|\ge 1$），则系统（1）不稳定。

定理11 设$P\ge 0$，若存在n个正实数r_1，r_2，…，r_n，使$\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}r_j\right)\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{1}{r_j}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}r_i\right)\ge 1$），则系统（1）不稳定。

证明 任取$A\in N[P,Q]$，设$D=diag\left(r_1,r_2,\cdots,r_n\right)$，则$D^{-1}AD$的第$i$行的行和为$\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}r_j$，因为$P\ge 0$，则$A\ge P\ge 0$，而$\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}r_j\right)\ge 1$，于是根据引理2和引理3有$\rho(A)=\rho\left(D^{-1}AD\right)\ge\rho(P)\ge\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}r_j\right)\ge 1$，由$A$的任意性，可知系统（1）不稳定。

推论2 设$Q\le 0$，若存在n个正实数r_1，r_2，…，r_n，使$\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}\left|q_{ij}\right|r_j\right)\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{1}{r_j}\sum_{i=1}^{n}\left|q_{ij}\right|r_i\right)\ge 1$），则系统（1）不稳定。

定理12 若$\min_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{m}_{ij}\right)\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{m}_{ij}\right)\ge 1$），则当区间矩阵含有零矩阵时，系统（1）是渐近混合稳定的。

证明 因为$0\in N[P,Q]$，则$\rho(0)<1$，即零矩阵是离散稳定的。但另一方面，由于$\bar{M}=\left(\bar{m}_{ij}\right)_{n\times n}$，$\bar{m}_{ij}=\min\left\{\left|p_{ij}\right|,\left|q_{ij}\right|\right\}$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，有$\left|p_{ij}\right|\ge\left|\bar{m}_{ij}\right|\ge\bar{m}_{ij}$，$\left|q_{ij}\right|\ge\left|\bar{m}_{ij}\right|=\bar{m}_{ij}$，即$|P|\ge\bar{M}$，$|Q|\ge\bar{M}$，而$\min_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\bar{m}_{ij}\right)\ge 1$，根据引理3有$\rho\left(\bar{M}\right)\ge 1$，再依引理2有$\rho(|P|)\ge\rho\left(\bar{M}\right)\ge 1$，$\rho(|Q|)\ge\rho\left(\bar{M}\right)\ge 1$，且由$0\in N[P,Q]$，有$P\le 0\le Q$，从而$\rho(P)\ge 1$与$\rho(Q)\ge 1$至少有一个成立，亦即$P$与$Q$至少有一个是不稳定的，依定义3，系统（1）为渐近混合稳定。

定理13 若存在n个正实数r_1，r_2，…，r_n，使$\min_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{n}\bar{m}_{ij}r_j\right)\ge 1$（或$\min_{1\le j\le n}\left(\frac{1}{r_j}\sum_{i=1}^{n}\bar{m}_{ij}r_i\right)\ge 1$）成立，则当区间矩阵含有零矩阵时，系统（1）是渐近混合稳定的。

4 例子

例9 考虑离散动态系统$x(k+1)=A(\otimes)x(k)$的稳定性。其中$A(\otimes)\in N[P,Q]$，$P=\begin{pmatrix}0.15 & -0.26\\ 0.24 & 0.31\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}0.41 & 0.58\\ 0.25 & 0.73\end{pmatrix}$。

显然$|P|\le|Q|$，易知$\max\sum_{j=1}^{2}\left|q_{ij}\right|=0.99<1$，由定理6知此系统渐近稳定。

例10 考虑离散动态系统$x(k+1)=A(\otimes)x(k)$的稳定性。其中$A(\otimes)\in N[P,Q]$，$P=\begin{pmatrix}-0.84 & -0.13\\ -0.35 & -0.62\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}0.65 & -0.12\\ 0.34 & 0.56\end{pmatrix}$。

显然$|P|\ge|Q|$，易知$\min\sum_{j=1}^{2}p_{ij}=0.97<1$，由定理8知此系统渐近稳定。

例11 考虑离散动态系统$x(k+1)=A(\otimes)x(k)$的稳定性。其中$A(\otimes)\in N[P,Q]$，$P=\begin{pmatrix}1.1 & 0.3\\ 0.5 & 0.6\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}1.2 & 0.5\\ 0.8 & 0.9\end{pmatrix}$。

显然$\boldsymbol{P}\geq 0$，易知$\min\sum_{j=1}^{2}p_{ij}=1.1\geq 1$，由定理10可知此系统不稳定。而$\sum_{i=1}^{2}p_{ij}=1.7<2$，不能由文献[2]中的定理2.7来判定。

例12　考虑离散动态系统$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(\otimes)\boldsymbol{x}(k)$的稳定性。其中$\boldsymbol{A}(\otimes)\in \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.3\\ 0.3 & 0.9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.5 & 0.9\end{pmatrix}$。

显然$\boldsymbol{P}\geq 0$，易知$\min\sum_{j=1}^{2}p_{ij}=0.97<1$，不符合定理10的条件，但可取$r_1$=0.5，$r_2$=1，可计算得：

$$\min\frac{\sum_{j=1}^{2}p_{ij}r_j}{r_i}=1.05\geq 1,\ (i=1,2),$$

由定理11知此系统不稳定。

例13　考虑离散动态系统$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(\otimes)\boldsymbol{x}(k)$的稳定性。其中$\boldsymbol{A}(\otimes)\in \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-0.9 & -0.3\\ -0.4 & -1.1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.8\end{pmatrix}$。

显然区间矩阵含有零矩阵，$\bar{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.8\end{pmatrix}$，且$\min\sum_{j=1}^{2}\bar{m}_{ij}=1$，由定理12可判断此系统混合稳定。

例14　考虑离散动态系统$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(\otimes)\boldsymbol{x}(k)$的稳定性。其中$\boldsymbol{A}(\otimes)\in \boldsymbol{N}[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-0.4 & -0.5\\ -0.2 & -0.9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.8 & 0.9\end{pmatrix}$。

显然区间矩阵含有零矩阵，$\bar{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.2 & 0.9\end{pmatrix}$，$\min\sum_{j=1}^{2}\bar{m}_{ij}=0.9<1$，不符合定理12的条件，但可取$r_1$=0.5，$r_2$=1，可计算得$\min\frac{\sum_{j=1}^{2}\bar{m}_{ij}r_j}{r_i}=1\geq 1,\ (i=1,2)$，由定理13可知此系统混合稳定。

参考文献：

[1] 彭晓林. 离散系统稳定与不稳定的代数判据[J]. 科学通报，1991，36(16)：1273-1274.

[2] 彭晓林，罗　晓. 灰色离散系统稳定与不稳定的代数判据[J]. 应用数学，1991，4(2)：76-81.

[3] 韩金舫，王清印，李永伟. 离散动态系统稳定与不稳定的简捷判据[J]. 系统工程与电子技术，2004，26(9)：1254-1257.

[4] 陈菊芳. 非线性灰色离散系统零解的稳定性[J]. 应用数学学报，1995，18(1)：123-128.

[5] 罗家洪. 矩阵分析引论[M]. 3版. 广州：华南理工大学出版社，2000：223-225.

[6] 程云鹏. 矩阵论[M]. 2版. 西安：西北工业大学出版社，1999：385.

[7] Minc H. 非负矩阵[M]. 杨尚骏，卢业广，杜吉配译. 沈阳：辽宁教育出版社，1990：31-35.

[8] 廖安平，刘建州. 矩阵论[M]. 长沙：湖南大学出版社，2005：92-93.

（责任编辑：廖友媛）