

马尔柯夫模型在保险市场中的应用

刘罗华¹, 曹红苹²

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412008; 2. 上海工程技术大学 管理学院, 上海 201620)

摘要: 阐述了马尔柯夫预测法的基本原理, 分析了保险市场中同险种市场占有率满足马尔柯夫链的性质, 用马尔柯夫模型预测了动态保险市场的占有率状况并做出了最优决策, 为保险公司经营和决策提供参考。

关键词: 马尔柯夫预测法; 决策; 保险市场

中图分类号: O211.62

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2008)02-0032-03

Application on Markov Model in Insurance Market

Liu Luohua¹, Cao Hongping²

(1. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China;
2. School of Management, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

Abstract The basic principle of Markov forecast is elaborated and the occupancy of same insurance types market should match with of the nature of Markov chain is also analyzed. By predicting the dynamic state of the insurance market share with Markov model, it makes out the best decision which can provide a reference for decision-making and insurance companies operators.

Key words Markov forecast; decision; insurance market

在市场经济条件下, 保险公司之间的竞争愈来愈激烈, 保险市场占有率的高低直接关系到保险公司的命运。每个保险公司无不通过各种渠道和手段来提高自己产品在市场中的占有率, 比如广告宣传、分红、免配额等。马尔柯夫预测法为保险公司经营者提供了一种预测市场状况的有效方式, 为制定保险公司的经营战略提供了直接依据。

1 马尔柯夫预测法的基本原理

1.1 马尔柯夫链的定义^[1]

马尔柯夫链是指事物的变化过程是仅与其近期状态有关, 而与其过去状态无关的随机过程, 并且该过程中的时间与状态都是离散的。马尔柯夫链有两个显著的特点: 第一, 无后效性; 第二, 在较长的时间下, 马尔柯夫过程逐渐趋于稳定状态, 而与其初始状态无关。

1.2 一步转移概率及一步转移概率矩阵

系统由一种状态向另一种状态转移是随机的, 用概率来描述, 就是转移概率和转移概率矩阵。设系统有 n 个状态, 用 P_{ij} 表示系统在时间 t_m 上处于状态 i , 在 t_{m+1} 时转变为状态 j 的一步转移概率; 用 P 表示一步转移概率矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}。$$

1.3 k 步转移概率及 k 步转移概率矩阵

由于系统的转移是随着时间的推移而不断发生的, 往往要经过多次转移。用 $P_{ij}^{(k)}$ 表示系统在时间 t_m 上处于状态 i , 经过 k 步转移后在 t_{m+k} 时转变为状态 j 的 k 步转移概率; 用 $P^{(k)}$ 表示 k 步转移概率矩阵:

收稿日期: 2007-11-20

作者简介: 刘罗华 (1969-), 男, 湖南茶陵人, 湖南工业大学副教授, 硕士, 主要从事金融风险随机研究。

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} & \cdots & P_{1n}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} & \cdots & P_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}^{(k)} & P_{n2}^{(k)} & \cdots & P_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

1.4 马尔柯夫预测模型^[2]

由于马尔柯夫链的分布情况, 取决于它的初始状态概率和转移概率, 所以马尔柯夫模型就是利用初始状态概率向量与转移概率矩阵, 预测系统未来状态的方法。

设系统有 n 个互不相容的状态, 系统的初始状态向量 $S^{(0)}$ 为:

$$S^{(0)} = (S_1^{(0)} \quad S_2^{(0)} \quad \cdots \quad S_n^{(0)}).$$

上式中:

$S_i^{(0)} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为系统处在状态 i 的初始概率。

经过 k 次转移后处在状态 i 的概率记为 $S_i^{(k)}$, 由切普曼-柯尔莫各洛夫方程^[3]可得:

$$S_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n S_i^{(k)} P_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

可得:

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} \cdot P.$$

由递推关系得:

$$S^{(k+1)} = S^{(0)} \cdot P^{k+1}.$$

即为:

$$(S_1^{(k-1)} \quad S_2^{(k-1)} \quad \cdots \quad S_n^{(k-1)}) = (S_1^{(0)} \quad S_2^{(0)} \quad \cdots \quad S_n^{(0)}) \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}^{k-1}.$$

2 马尔柯夫模型在保险市场中的应用

在保险市场中, 同一险种的市场占有率只与前一期的市场占有率有关, 与远期的关系甚微, 满足了马尔柯夫链的“无后效性”及“平稳性”, 所以本文应用马尔柯夫链来预测同一险种的市场占有率状况, 为保险公司制定经营战略提供依据。

2.1 马尔柯夫预测模型在保险市场中的应用举例

设某地区市场上有 A 、 B 、 C 3 家保险公司开办了同一险种 (以 1 年为 1 期) 的有关业务。根据保险市场调查, 上期该地区共有投保该险种的保单 100 000 份, 其中 A 保险公司 25 000 份; B 保险公司 30 000 份; C 保险公司 45 000 份。上期购买 A 保险公司保单的客户, 这期有 75% 仍购买 A 保险公司保单, 15% 转买 B 保险公司保单, 10% 转买 C 保险公司保单; 上期购买 B 保险公司保单的客户, 这期有 80% 仍购买 B 保险公司保单, 8% 转买 A 保险公司保单, 12% 转买 C 保险公司保单;

上期购买 C 保险公司保单的客户, 这期有 85% 仍购买 C 保险公司保单, 7% 转买 A 保险公司保单, 8% 转买 B 保险公司保单。现要求预测本期和下期 A 、 B 、 C 3 家保险公司的市场占有率及长期的 (稳定) 市场占有率。根据调查所得资料, 可知 A 、 B 、 C 3 家保险公司初始 (上期) 的市场占有率为:

$$S^{(0)} = [0.25 \quad 0.30 \quad 0.45].$$

一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 0.75 & 0.15 & 0.10 \\ 0.08 & 0.80 & 0.12 \\ 0.07 & 0.08 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

由马尔柯夫预测模型 $S^{(k+1)} = S^{(0)} \cdot P^{k+1}$, 各公司本期市场占有率为:

$$S^{(1)} = S^{(0)} \cdot P = [0.243 \quad 0.313 \quad 0.443].$$

由此可知, 本期 A 保险公司、 C 保险公司市场占有率有所下降, B 保险公司市场占有率有所攀升。下期市场占有率为:

$$S^{(2)} = S^{(0)} \cdot P^2 = [0.238 \quad 0.322 \quad 0.438].$$

由此可知, 下期 A 保险公司、 C 保险公司市场占有率继续下降, B 保险公司市场占有率继续攀升。为掌握更加详细的数据, 对于以后的市场占有率, 其测算结果见表 1。

表 1 市场占有率变化情况

Table 1 Conditions for market shares changes

k (时间)	保险公司		
	A	B	C
0	0.250 0	0.300 0	0.450 0
1	0.243 0	0.313 5	0.443 5
2	0.238 4	0.322 7	0.438 9
3	0.235 3	0.329 1	0.435 6
4	0.233 3	0.333 4	0.433 3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	0.229 5	0.343 1	0.427 5
$k+1$	0.229 5	0.343 1	0.427 5

从表 1 可以看出, A 保险公司、 C 保险公司市场占有率是逐期下降的, B 保险公司市场占有率逐期上升, 并且这种变化在刚开始的几个时期较明显, 随着时间 k 的推移, 变化逐渐缩小。经过一定长的时间, 市场占有率趋于稳定状态, 也验证了马尔柯夫链的平稳性。由马尔柯夫链的平稳性可知, 在较长的时间下, 马尔柯夫链的状态 $S^{(k)}$ 与状态 $S^{(k+1)}$ 的概率相等, 从而得到本案例的稳定条件^[4]是:

$$S^{(k)} = S^{(k+1)},$$

$$\text{又因为: } S^{(k+1)} = S^{(k)} \cdot P,$$

$$\text{可得: } S^{(k)} = S^{(k)} \cdot P,$$

即为:

$$\begin{cases} [S_A^{(k)} & S_B^{(k)} & S_C^{(k)}] = [S_A^{(k-1)} & S_B^{(k-1)} & S_C^{(k-1)}] \cdot P; \\ S_A^{(k)} + S_B^{(k)} + S_C^{(k)} = 1 \end{cases}$$

解得: $S^{(k)} = [0.2295 \quad 0.3431 \quad 0.4275]$ 。

A、B、C3家保险公司在稳定状态下的市场占有率分别为:

22.95%, 34.31%, 42.75%。

2.2 马尔柯夫决策^[5]

预测的目的是为了更好地决策。决策问题一般都是在稳定状态下进行分析的, 马尔柯夫方法满足了决策问题对稳定性的要求, 使得决策更具有准确性。

假设各保险公司从每个客户处平均每期获取利润300元。从表1可看到, A保险公司的市场占有率不及B保险公司和C保险公司, 这样对A保险公司的经营非常不利。A保险公司为了改变局面, 可以从吸收老顾客和吸收B保险公司和C保险公司的顾客着手制定相应的决策方案。

方案1 吸收老顾客, 此方案需花费40万元。估计此方案实施后, 一步转移概率矩阵为:

$$P_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.85 & 0.07 & 0.08 \\ 0.08 & 0.80 & 0.12 \\ 0.07 & 0.08 & 0.85 \end{bmatrix} \end{matrix}。$$

方案2 吸收B保险公司和C保险公司的顾客, 此方案需花费60万元。估计此方案实施后, 一步转移概率矩阵为:

$$P_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.10 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.14 & 0.01 & 0.85 \end{bmatrix} \end{matrix}。$$

在方案1和2中, 哪一种方案能使A保险公司的市场占有率提升幅度较大且获取的利润最丰厚, 这便是保险公司经营策略的最佳选择问题。

在方案1中, 利用马尔柯夫预测模型可算出:

$$S'^{(1)} = S^{(0)} \cdot P_1 = [0.2680 \quad 0.2935 \quad 0.4385]。$$

A保险公司的市场占有率提升了0.018, 可获利54万元, 扣除花费40万元, 盈利14万元。

在方案2中, 利用马尔柯夫预测模型可算出:

$$S''^{(1)} = S^{(0)} \cdot P_2 = [0.2955 \quad 0.2820 \quad 0.4225]。$$

A保险公司的市场占有率提升了0.0455, 获利136.5元, 扣除花费60万元, 盈利76.5万元。

通过对两种方案进行比较可发现, 方案2的市场占有率提升幅度较大, 盈利明显高于方案1, 所以方案2为最优决策。

3 结语

马尔柯夫预测模型在保险市场有着极为广泛的应用: 它不仅预测同一险种的市场占有率状况, 还可以预测保险公司的经营利润。因此, 利用马尔柯夫预测法可以让保险公司了解长期保险市场竞争的状况, 为保险公司制定经营战略提供理论依据。

参考文献:

- [1] 高崇之, 朱喜安. 新编统计学教程[M]. 武汉: 湖北辞书出版社, 1994: 8.
- [2] 张梅. 马尔科夫预测法在通讯市场中的应用[J]. 牡丹江教育学院学报, 2006(4): 71-72.
- [3] 邓永录, 梁之顺. 随机点过程及其应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 1997: 10.
- [4] 贺胜柏. 马尔柯夫预测模型及其实证分析[J]. 中南财经政法大学学报, 2002(2): 132-135.
- [5] 张延安. 试论马尔柯夫模型及应用[J]. 沈阳大学学报, 2001, 13(2): 44-46.

(责任编辑: 廖友媛)