一类具多重极限环的二次 Hamilton 系统的近似系统

赵育林[1, 2]，陈海波[2]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中南大学 数学学院, 湖南 长沙 410075 ）

摘　要：利用 Mel'nikov 函数，对一类具有以抛物线与直线为边界的周期环域的单中心二次 Hamilton 系统的三次扰动，分别构造出恰好存在两个单重极限环、恰好存在一个二重极限环、恰好存在一个极限环和一个分界线环的近似系统。

关键词：三次扰动；Hamilton 系统；极限环；近似系统

中图分类号：O175　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1673-9833(2008)02-0025-04

Approximate System for Quadratic Hamiltonian System with Multiple Limits

Zhao Yulin[1,2], Chen Haibo[2]

（1. Department of Mathematics, Central South University, Changsha 410075, China;
2. Department of Mathematics & Science , Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China）

Abstract: By using Mel'nikov functions, for the Poincare bifurcation problems of quadratic Hamiltonian system under cubic perturbation with one center and the periodic regions, which has a parabola and an invariant straight line as it's bounding. the approximate system to show that there exist just two single limit cycles, or just one double-limit cycle, or just one single-limit cycle and one separatric cycle are given.

Key words: cubic perturbation; Hamiltonian system; limit cycle; approximate system

0　引言

确定 Hamilton 系统在扰动下的极限环个数是个比较困难的问题，这一问题与弱化 Hibert 第十六问题及平面系统中高余维分岔研究有密切的联系。国内外在此方面有不少工作[1-6]，文献[1]研究了一类具单中心二次 Hamilton 系统在二次扰动下的分岔；文献[3]讨论了一类扰动双中心 Hamilton 系统的分岔，得到存在唯一极限环的充分条件；最近，文献[4]讨论了具有抛物线与直线为边界的周期环域的单中心二次系统的 Poincare 分岔。另外，在给出系统的极限环个数的基础上，如何构造出相应的实例也是很有意义的工作[5,6]。

受文献[4，6]的启发，我们讨论如下系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=-2+y+x^2+\varepsilon P_3(x,y),\\ \dot{y}=-2xy+\varepsilon Q_3(x,y),\end{cases}\qquad (1)$$

其中：$P_3(x,y)=\sum\limits_{i+j\le 3}a_{ij}x^iy^j$，

$$Q_3(x,y)=\sum_{i-j\le 3}b_{ij}x^iy^j。$$

分别构造出该系统恰好存在两个单重极限环、恰好存在一个二重极限环、恰好存在一个极限环和一个分界线环的近似系统。

1　预备知识

当 $\varepsilon=0$ 时，系统(1)是 Hamilton 系统，其 Hamilton 函数为：

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y(2x^2+y-4)=h。\qquad (2)$$

当 $h=0$ 时，式（2）表示抛物线 $2x^2+y-4=0$ 和直线

收稿日期：2007-12-25
作者简介：赵育林（1973- ），男，湖南湘潭人，湖南工业大学讲师，中南大学博士研究生，主要研究方向为微分方程.

$y = 0$；当 $h = -2$ 时它表示孤立的点 $O_1(0, 2)$；当 $-2<h<0$ 时，它表示分别绕 $O_1(0, 2)$ 的一族闭曲线，设 Γ_h 为 $H(x, y) = h$ 当 $-2< h <0$ 时的闭轨。

引理1　系统（1）的Abel积分 $I(h)$ 为：

$$I(h)=8\sqrt{2+h}\left\{\left[\phi_1(h)-\left(1-\sqrt{1+\frac{h}{2}}\right)\phi_0(h)\right]\alpha_1+\frac{h}{2}\left[\phi_1(h)-\left(1-\sqrt{1+\frac{h}{2}}\right)\phi_0(h)\right]\beta_1+\left[\left(4+\frac{3}{2}h\right)\phi_1(h)-\left(1-\sqrt{1+\frac{h}{2}}\right)\phi_0(h)\right]\delta_1\right\},$$

其中：

$$\phi_1(h)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{2\sqrt{1+h/2}}{1+\sqrt{1+h/2}}\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\phi_0(h)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\frac{2\sqrt{1+h/2}}{1+\sqrt{1+h/2}}\sin^2\theta}},$$

系数 $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$ 在以下的 $\tilde{I}(k)$ 式中给出。

证明　令 $u=\sqrt{2}z$，从而有

$$z_1(h)=\sqrt{1-\sqrt{1+h/2}},\ z_2(h)=\sqrt{1+\sqrt{1+h/2}},$$

$(-2< h <0)$。先计算 $I_{2n}(h)$：

$$I_{2n}(h)=\int_{u_1(h)}^{u_2(h)}u^{2n}\sqrt{-u^4+4u^2+2h}\,\mathrm{d}u=2^{n+3/2}z_1z_2\int_{z_1(h)}^{z_2(h)}z^{2n}\sqrt{-\left(1-z^2/z_1^2\right)\left(1-z^2/z_2^2\right)}\,\mathrm{d}z。$$

设 $k_i = 1/z_i\,(i = 1, 2)$，则：

$$I_{2n}(h)=\left(2^{n+3/2}/k_1k_2\right)\int_{1/k_1}^{1/k_2}z^{2n}\sqrt{-\left(1-k_1^2z^2\right)\left(1-k_2^2z^2\right)}\,\mathrm{d}z,$$

又设 $k_2z=\sqrt{1-k^2t^2}$，且 $k^2=\left(k_1^2-k_2^2\right)/k_1^2$，则

$$I_{2n}(h)=\frac{2^{n+3/2}\left(k_1^2-k_2^2\right)^2}{k_1^4k_2^{2n-3}}\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)^n t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2t^2}}=$$

$$\frac{k^4}{k_2^3}\left[-\frac{1}{k^4}\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)^{n-2}\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}+\frac{2-k^2}{k^4}\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)^{n+1}\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}-\frac{1-k^2}{k^4}\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)^{n}\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}\right]-$$

$2^{n+3/2}k_2^{-(2n-3)}\left[-\phi_{n-2}(k)+\left(2-k^2\right)\phi_{n+1}(k)-\left(1-k^2\right)\phi_n(k)\right]$。这里

$\phi_n(k)=\int_0^1\left[\left(1-k^2t^2\right)^n\Big/\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}\right]\mathrm{d}t$，$(n = 0, 1, 2, 3)$。

取 $n = 0, 1$ 可求得：

$$I_0(h)=\tilde{I}_0(k)=8\sqrt{2}k_2^{-3}\left[\left(2-k^2\right)\phi_1(k)-\phi_2(k)-\left(1-k^2\right)\phi_0(k)\right],$$

$$I_2(h)=\tilde{I}_2(k)=32\sqrt{2}k_2^{-5}\left[\left(2-k^2\right)\phi_2(k)-\left(1-k^2\right)\phi_1(k)-\phi_3(k)\right]。$$

以下给出一个导数公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\left(1-k^2t^2\right)^{m-1}\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}\right]=\left[k^2\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}\right]^{-1}\left[\left(2m-1\right)\left(1-k^2t^2\right)^{m+1}-2m\left(2-k^2\right)\left(1-k^2t^2\right)^m+\left(2m-1\right)\left(1-k^2\right)\left(1-k^2t^2\right)^{m-1}\right]。\tag{3}$$

将式(3)两端从0到1积分，即可得

$$(2m+1)\phi_{m+1}(k)-2m\left(2-k^2\right)\phi_m(k)+(2m-1)\left(1-k^2\right)\phi_{m-1}(k)=0,$$

在上式中分别取 $m = 1, 2$ 有

$$\phi_2(k)=\frac{1}{3}\left[2\left(2-k^2\right)\phi_1(k)-\left(1-k^2\right)\phi_0(k)\right],$$

$$\phi_3(k)=\frac{1}{15}\left[8\left(2-k^2\right)^2-9\left(1-k^2\right)\right]\phi_1(k)-\frac{4}{15}\left(1-k^2\right)\left(2-k^2\right)\phi_0(k),$$

从而得到

$$\tilde{I}_0(k)=\frac{8\sqrt{2}}{3k_2^3}\left[\left(2-k^2\right)\phi_1(k)-2\left(1-k^2\right)\phi_0(k)\right],$$

$$\tilde{I}_2(k)=\frac{32\sqrt{2}}{15k_2^5}\left\{\left[2\left(2-k^2\right)^2-6\left(1-k^2\right)\right]\phi_1(k)-\left(2-k^2\right)\left(1-k^2\right)\phi_0(k)\right\}。$$

因 $k^2=\left(k_1^2-k_2^2\right)/k_1^2$，有 $k_2^2=\left(2-k^2\right)/2$，则

$$\tilde{I}_2(k)=\frac{64\sqrt{2}}{15k_2^3}\left\{\left[2\left(2-k^2\right)-\frac{6\left(1-k^2\right)}{2-k^2}\right]\phi_1(k)-\left(1-k^2\right)\phi_0(k)\right\},$$

$(0 < k < 1)$，其中

$$\phi_1(k)=\int_0^1\frac{\left(1-k^2t^2\right)\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\phi_0(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

$\phi_1(k), \phi_0(k)$ 为第一、二类椭圆积分，相互独立，不能互化。由 $h=\dfrac{-8\left(1-k^2\right)}{\left(2-k^2\right)^2}$，可得 $I(h)=8\sqrt{2}k_2^{-3}\tilde{I}(k)$。

这里 $\tilde{I}(k)=\bar{f}_1(k)\alpha_1+\bar{f}_2(k)\beta_1+\bar{f}_3(k)\delta_1$，其中：$\alpha_1=\alpha/3$，$\beta_1=8\beta/3$，$\delta_1=8\delta/15$，且 α, β, δ 由文[4]的式(2)给出。同时

$$\bar{f}_1(k)=\left(2-k^2\right)\phi_1(k)-2\left(1-k^2\right)\phi_0(k),$$

$$\bar{f}_2(k)=-\frac{1-k^2}{2-k^2}\phi_1(k)+\frac{2\left(1-k^2\right)^2}{\left(2-k^2\right)^2}\phi_0(k),$$

$$\bar{f}_2(k)=-\frac{1-k^2}{2-k^2}\phi_1(k)+\frac{2\left(1-k^2\right)^2}{\left(2-k^2\right)^2}\phi_0(k),$$

注意到 $k^2=2\sqrt{1+h/2}/(1+\sqrt{1+h/2})$，便可得引理1的结论。证毕。

2　近似系统的构造

令 $R=\sqrt{1+h/2}$，显然 $0<R<1$，则

$$I(h)=8\sqrt{2(1+R)}\left[f_1(R)\alpha'+f_2(R)\beta'+f_3(R)\delta'\right]=$$

$8\sqrt{2(1+R)}\tilde{I}(R)$。其中

$$f_1(R)=\phi_1(R)-(1-R)\phi_0(R),$$
$$f_3(R)=\left(1+3R^2\right)\phi_1(R)-(1-R)\phi_0(R),$$
$$f_2(R)=-\left(1-R^2\right)\phi_1(R)+\left(R^3-R^2-R-1\right)\phi_0(R)，且$$
$$\alpha'=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(a_{10}+b_{01}+6a_{30}+\frac{2}{3}b_{21}\right),$$
$$\beta'=\frac{16\sqrt{2}}{21}\left(a_{12}+3b_{03}\right),$$
$$\delta'=\frac{16\sqrt{2}}{15}\left(a_{11}+2b_{02}\right)+\frac{256\sqrt{2}}{105}\left(a_{12}+3b_{03}\right)+\frac{32\sqrt{2}}{45}\left(3a_{30}+b_{01}\right)。$$

显然$f_1(R)$，$f_2(R)$，$f_3(R)$是定义在$(0, 1)$内连续可微且线性无关的函数，系统(1)对应的Abel积分$I(h)$即$\tilde{I}(R)$是这3个函数$f_1(R)$，$f_2(R)$，$f_3(R)$关于3个独立参数α'，β'，δ'的线性组合。任取R_1，R_2满足：

$0<R_1<R_2<1$，令$\tilde{I}(R_1)=\tilde{I}(R_2)=0$，即

$$\begin{cases}f_1(R_1)\alpha'+f_2(R_1)\beta'+f_3(R_1)\delta'=0，\\ f_1(R_2)\alpha'+f_2(R_2)\beta'+f_3(R_2)\delta'=0。\end{cases}\tag{4}$$

因方程组（4）关于未知数α'，β'的系数行列式

$$\begin{vmatrix}f_1(R_1) & f_3(R_1)\\ f_1(R_2) & f_3(R_2)\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以当$\beta'\neq 0$时可以从方程组(4)中解出α'，β'，得

$$\begin{cases}\alpha'=\dfrac{f_3(R_1)f_2(R_2)-f_3(R_2)f_2(R_1)}{f_1(R_1)f_3(R_2)-f_1(R_2)f_3(R_1)}\beta'=\alpha(R_1,R_2)\beta',\\ \delta'=\dfrac{f_1(R_2)f_2(R_1)-f_1(R_1)f_2(R_2)}{f_1(R_1)f_3(R_2)-f_1(R_2)f_3(R_1)}\beta'=\delta(R_1,R_2)\beta'。\end{cases}\tag{5}$$

此条件等价于：（其中$a_{12}+3b_{03}\neq 0$）

$$\begin{cases}a_{10}=\dfrac{4}{7}\alpha\left(R_1,R_2\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\left(b_{03}+6a_{30}+\dfrac{2}{3}b_{21}\right),\\ b_{01}=\dfrac{15}{14}\left[\delta\left(R_1,R_2\right)-\dfrac{16}{5}\right]\left(a_{12}+3b_{03}\right)-3a_{30}-\dfrac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right)。\end{cases}\tag{6}$$

满足式（6）的系统（1）形如（其中$a_{12}+3b_{03}\neq 0$）：

$$\begin{cases}\dot{x}=-2+y+x^2+\varepsilon\left\{\left[\left[\dfrac{4}{7}\alpha\left(R_1,R_2\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\left(b_{03}+6a_{30}+\dfrac{2}{3}b_{21}\right)\right]\right]x+\bar{P}_3(x,y)\right\},\\ \dot{y}=-2xy+\varepsilon\left\{\left[\left[\dfrac{15}{14}\left(\delta\left(R_1,R_2\right)-\dfrac{16}{5}\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-3a_{30}-\dfrac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right)\right]\right]y+\bar{Q}_3(x,y)\right\},\end{cases}\tag{7}$$

这里：$\bar{P}_3(x,y)=\sum\limits_{i+j\le 3,a_{10}=0}a_{ij}x^iy^j$，

$\bar{Q}_3(x,y)=\sum\limits_{i+j\le 3,b_{01}=0}b_{ij}x^iy^j$，

而$\alpha(R_1，R_2)$，$\beta(R_1，R_2)$由式（5）给出。

定理1　对于任意给定的R_1，R_2满足$0<R_1<R_2<1$，当$0<|\varepsilon|\ll 1$时，近似系统（7）在上半平面恰好存在两个单重极限环也即系统（1）可以存在两个极限环。这两个环分别位于两条闭曲线：

$\Gamma_i:\dfrac{1}{2}y(2x^2+y-4)=2(R_i^2-1)$，（$i=1，2$）

的小邻域内。

证明　由文[4]知$I(h)=0$在$-2<h<0$上至多有两个零点，即$\tilde{I}(R)=0$在$0<R<1$上至多有两个零点；又注意到条件（6）成立时，函数$\tilde{I}(R)$在$0<R<1$内恰好存在两个单重根$R=R_i,(i=1,2)$。即函数$I(h)$在$-2<h<0$内恰好存在两个单重根$h=2\left(R_i^2-1\right),(i=1,2)$。由文献[6]知：当$0<|\varepsilon|\ll 1$，定理1的结论成立。

定理1即为系统（1）存在$(0,2)$分布的一个构造性定理，由于R_1，R_2在$0<R<1$内的任意性，也即h_1，h_2在$-2<h<0$内的任意性，故这两个极限环可以任意地落在闭曲线族Γ_h的任意两条闭曲线的小邻域内。

定理2 对任给的R_0：$0<R_0<1$，考虑关于α'，β'，δ'的方程组$\tilde{I}(R_0)=\tilde{I}'(R_0)=0$，即

$$\begin{cases}f_1(R_0)\alpha'+f_2(R_0)\beta'+f_3(R_0)\delta'=0,\\ f_1'(R_0)\alpha'+f_2'(R_0)\beta'+f_3'(R_0)\delta'=0,\end{cases}$$

的非零解为$\alpha'=\alpha_0$，$\beta'=\beta_0$，$\delta'=\delta_0$。如果系统（1）的参数满足以下条件：

$$\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(a_{10}+b_{01}+6a_{30}+\dfrac{2}{3}b_{21}\right),\\ \beta_0=\dfrac{16\sqrt{2}}{21}\left(a_{12}+3b_{03}\right),\\ \delta_0=\dfrac{16\sqrt{2}}{15}\left(a_{11}+2b_{02}\right)+\dfrac{256\sqrt{2}}{105}\left(a_{12}+3b_{03}\right)+\dfrac{32\sqrt{2}}{45}\left(3a_{30}+b_{01}\right)。\end{cases}\tag{8}$$

则当$0<|\varepsilon|\ll 1$时，系统（1）具有一个二重极限环，此二重环将位于闭曲线Γ_0：

$\dfrac{1}{2}y(2x^2+y-4)=2(R_0^2-1)$的小邻域内。

证明　由方程组（8）可解得：

$$\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{f_3(R_0)f_2'(R_0)-f_3'(R_0)f_2(R_0)}{f_1(R_0)f_3'(R_0)-f_1'(R_0)f_3(R_0)}\beta_0=\alpha(R_0)\beta_0,\\ \delta_0=\dfrac{f_2(R_0)f_1'(R_0)-f_2'(R_0)f_1(R_0)}{f_1(R_0)f_3'(R_0)-f_1'(R_0)f_3(R_0)}\beta_0=\delta(R_0)\beta_0,\end{cases}\tag{9}$$

条件（9）等价于

$$\begin{cases}a_{10}=\dfrac{4}{7}\alpha\left(R_0\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\left(b_{03}+6a_{30}+\dfrac{2}{3}b_{21}\right),\\ b_{01}=\dfrac{15}{14}\left[\delta\left(R_0\right)-\dfrac{16}{5}\right]\left(a_{12}+3b_{03}\right)-3a_{30}-\dfrac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right),\end{cases}$$

对应的系统（1）为（其中$a_{12}+3b_{03}\neq 0$）：

$$\begin{cases}\dot{x}=-2+y+x^2+\varepsilon\left\{\left[\frac{4}{7}\alpha\left(R_0\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.\left(b_{03}+6a_{30}+\frac{2}{3}b_{21}\right)\right]x+\bar{P}_3(x,y)\right\},\\ \dot{y}=-2xy+\varepsilon\left\{\left[\frac{15}{14}\left(\delta(R_0)-\frac{16}{5}\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.3a_{30}-\frac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right)\right]y+\bar{Q}_3(x,y)\right\},\end{cases}$$

因已知函数$\tilde{I}(R)$在$0<R<1$内至多存在两个零点，所以此系统所对应的函数：

$$\tilde{I}_1(R)=f_1(R)\alpha(R_0)+f_2(R)+f_3(R)\delta(R_0)$$

在$0<R<i$内存在唯一的二重根$R=R_0$，也就是$\tilde{I}_1(R_0)=\tilde{I}_1'(R_0)=0,\ \tilde{I}_1''(R_0)\neq 0$。

任给v：$0<v\ll 1$，则函数

$$\tilde{I}_1^{(v)}(R)=f_1(R)[\alpha(R_0)+v]+f_2(R)+f_3(R)\delta(R_0)\text{，}\qquad(10)$$

$$\tilde{I}_1^{(-v)}(R)=f_1(R)[\alpha(R_0)-v]+f_2(R)+f_3(R)\delta(R_0)\text{，}\qquad(11)$$

由它们的图形可知：对给定充分小的v，一定存在这样的$\varepsilon:0</\varepsilon/\ll 1$，使得对应于函数（10）的系统（1）不存在极限环；对应于函数（11）的系统（1）恰好存在两个极限环，且它们均位于上半平面的闭曲线Γ_0的小邻域内。因此对应于ε，必会存在相应的v_0：$-v<v_0<v$，使系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=-2+y+x^2+\varepsilon\left\{\left[\left(\frac{4}{7}\alpha(R_0)+v_0\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.\left(b_{03}+6a_{30}+\frac{2}{3}b_{21}\right)\right]x+\bar{P}_3(x,y)\right\},\\ \dot{y}=-2xy+\varepsilon\left\{\left[\frac{15}{14}\left(\delta(R_0)+v_0-\frac{16}{5}\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.3a_{30}-\frac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right)\right]y+\bar{Q}_3(x,y)\right\},\end{cases}$$

在上半平面的闭曲线Γ_0的小邻域内恰好存在一个二重极限环。证毕。

对式(5)中的函数$\alpha(R_1,R_2)$和$\delta(R_1,R_2)$，当$R_2\to 1-0$取极限值有：

$$\alpha_1=\frac{4f_2(R_1)}{f_3(R_1)-4f_1(R_1)}\beta_0=\alpha(R_1)\beta_0\text{，}$$

$$\delta_1=-\frac{f_2(R_1)}{f_3(R_1)-4f_1(R_1)}\beta_0=-\frac{1}{4}\alpha(R_1)\beta_0\text{，}$$

则满足上述条件的系统（1）为：

$$\begin{cases}\dot{x}=-2+y+x^2+\varepsilon\left\{\left[\frac{4}{7}\alpha\left(R_1\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.\left(b_{03}+6a_{30}+\frac{2}{3}b_{21}\right)\right]x+\bar{P}_3(x,y)\right\},\\ \dot{y}=-2xy+\varepsilon\left\{\left[-\left(\frac{15}{56}\alpha(R_1)+\frac{24}{7}\right)\left(a_{12}+3b_{03}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.3a_{30}-\frac{3}{2}\left(a_{11}+2b_{02}\right)\right]y+\bar{Q}_3(x,y)\right\},\end{cases}\qquad(12)$$

从而类似定理2的证明，我们可得：

定理3 对给定的R_1：$0<R_1<1$和充分小的ε：$0</\varepsilon/\ll 1$，必存在系统（12）这样的一个近似系统，此系统在上半平面的闭曲线Γ_1：$\frac{1}{2}y(2x^2+y-4)=2(R_1^2-1)$的小邻域内恰好存在一个极限环，而在上半平面的弓形闭曲线L_1：$\frac{1}{2}y(2x^2+y-4)=0$的小邻域内存在一个分界线环。

参考文献：

[1] Song Yan. The poincare bifurcation of a class of quadratic systems [J]. Pure and Applied Math., 2004, 20(3)：291-294.

[2] Zhao Yulin. On the number of zeros of Abelian integrals for a polynomial Hamiltonian irregular at infinity [J]. J. Diff. Equs., 2005, 209：329-364.

[3] Cheng Shihua, Feng Jianwen .Bifurcation in perturbed Hamiltonian system with two centers[J]. J.of. Math. 1996,16 (3)：307-311.

[4] 赵育林. 一类单中心Hamilton系统在三次扰动下的Poincare分岔[J]. 数学理论与应用，2006(1)：117-120.

[5] Tan Xinxin, Feng Enmin, Shen Boqian. Study on the poincare bifurcation of quadratic system with two centers and two unbounded heteroclinic loops once again[J]. Acta. Math. Appl. Sic., 2004, 27(2)：300-309.

[6] Shen Boqian. An approximate system for a differential system with a multiple limit cycle [J]. Acta. Math. Appl. Sica., 1988, 21(2)：282-287.

（责任编辑：罗立宇）