第22卷第2期
2008年3月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.22 No.2
Mar. 2008

路图与圈图的积图的临界群

陈平鸽，侯耀平

（湖南师范大学 数学系，湖南 长沙 410081）

摘 要：图的临界群是图生成树数目的一个加细。确定了积图 $P_m \cdot C_n$（$m \leq 4$）的临界群的结构，证明了 $P_3 \cdot C_n$ 的临界群恰好为 n+1 个偶数阶循环群的直和，而 $P_4 \cdot C_n$ 的临界群恰好为 3 个偶数阶循环群的直和。

关键词：图的 Laplacian 矩阵；临界群；群的 Smith 标准形；路；圈

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)02-0021-04

The Critical Group of Graph P_m and C_n

Chen Pingge，Hou Yaoping

（Department of Mathematics，Hunan Normal University，Changsha 410081，China）

Abstract：We study the structure of the critical group on the graph $P_m \cdot C_n$（$m \leq 4$）. An explicit expression of the Smith normal form of critical group on the graph $P_3 \cdot C_n$ and $P_4 \cdot C_n$ can be decided, which are always the direct product of n+1 cyclic groups with even order and the direct product of three cyclic groups with even order respectively.

Key words：graph Laplacian matrix；critical group；the Smith normal form；path；cycle

1 背景知识

图的临界群是定义在图上的一个有限交换群，其群结构是图的一个精细不变量，它与图的 Laplacian 理论密切相关。

设 $\boldsymbol{G}$ =（V，E）是一个无环的允许有重边的有限图，$\boldsymbol{G}$ 的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 是 $|V| \times |V|$ 阶矩阵，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 的对应于顶点 v 和 v' 处的元素为 $L_{v,v'} = \begin{cases} \mathrm{d}(v)，当 v = v'； \\ -m_{v,v'}，当 v \neq v'， \end{cases}$ 其中：$m_{v,v'}$ 表示边 $\{v, v'\}$ 的重数；$\mathrm{d}(v)$ 为 v 在 $\boldsymbol{G}$ 中的度。

当 $\boldsymbol{G}$ 是连通图时，把 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 看成是交换群 $\mathbb{Z}^{|V|}$ 到 $\mathbb{Z}^{|V|}$ 的群同态，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ 的核（Kernel）是由 $\mathbb{Z}^{|V|}$ 中全 1 的向量生成的 $\mathbb{Z}^{|V|}$ 的子群，它的余核（Cokernel）具有形式 $\mathbb{Z}^{|V|} / im\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) \cong \mathbb{Z} \oplus K(\boldsymbol{G})$，群 $K(\boldsymbol{G})$ 称为图 $\boldsymbol{G}$ 的临界群。由图的矩阵树定理可知，群 $K(\boldsymbol{G})$ 的阶恰为 $\boldsymbol{G}$ 的生成树数目 $\kappa(\boldsymbol{G})$。

图 $\boldsymbol{G}$ 的临界群 $K(\boldsymbol{G})$ 通常也称为图 $\boldsymbol{G}$ 的 Picard 群、树群、沙堆群，更多的背景知识可参看文献[1,2]。

与图的生成树的计数已有大量的结果相比，图的临界群的结果相对较少，目前只确定了某些特殊图类的临界群，如完全图、阀值图、完全多部图、完全图的积[3]、格图 $P_n \times P_m$，$n \leq 3$[2]、轮图 $P_2 \times C_n$[4]等。

G_1 与 G_2 的积图 $G_1 \cdot G_2 = (V, E)$，$V = V_1 \times V_2$，$E = E_1 \times E_2$，换言之，$G_1 \cdot G_2$ 由顶点集 $V = V_1 \times V_2$，且 $G_1 \cdot G_2$ 中两顶点 (x_1, x_2) 与 (y_1, y_2) 相邻，当且仅当 $\{x_1, y_1\} \in E_1$ 且 $\{x_2, y_2\} \in E_2$。当 n 为偶数时，$P_m \cdot C_n$ 为非连通图，所以在本文中考虑当 n 为奇数时，$P_m \cdot C_n (m \leq 4)$ 的临界群的结构。当 m=1 时，$P_1 \cdot C_n$ 是个空图；当 m=2 时，$P_2 \cdot C_n \cong C_{2n}$，它们的临界群结构是简单的。

本文的主要目的是确定图 $P_3 \cdot C_n$ 与 $P_4 \cdot C_n$（$n \geq 3$ 且 n 是奇数）的临界群的结构问题。由于 $P_m \cdot C_n$ 是平面图及平面图和它的平面对偶图具有同构的临界群，因此，在讨论 $P_3 \cdot C_n$ 与 $P_4 \cdot C_n$ 的临界群的结构时都是转化

收稿日期：2008-01-22
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10471037），湖南省教育厅科研基金资助项目（06A037）
作者简介：陈平鸽（1981-），女，湖南常德人，湖南师范大学硕士研究生，主要从事代数图论的研究；
侯耀平（1963-），男，湖南新邵人，湖南师范大学教授，博士，博士生导师，主要从事组合数学和图论方面的研究.

为讨论它们的对偶图的临界群。

本文的主要工具是整数矩阵的Smith标准形化。对于任一整数矩阵，在整数环$\mathbb{Z}$上实施一系列的行列变换可得到它的Smith标准形$S(\boldsymbol{A})=\mathrm{diag}(S_{11}，S_{22},\cdots,S_{nn})$，其中$S_{ii}$是非负整数，且$S_{ii}$整除$S_{i+1,i+1}$。对于每个$i$，积$S_{11}S_{22}\cdots S_{ii}$是$\boldsymbol{A}$的所有$i$阶子式的最大公因式，将由此来决定$\boldsymbol{A}$的Smith标准形。两个矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{Z}^{m\times n}$，若存在矩阵$\boldsymbol{P}\in \boldsymbol{GL}(m,\mathbb{Z})$，$\boldsymbol{Q}\in \boldsymbol{GL}(n,\mathbb{Z})$，使得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$，则称$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是幺模等价的，记作$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

定理1 对$n\geq 3$，且n为奇数，图$P_3\cdot C_n$的临界群为$K(P_3\cdot C_n)\cong\mathbb{Z}_2^2\oplus\mathbb{Z}_4^{n-2}\oplus\mathbb{Z}_{4n}$。

2 $P_4\cdot C_n$的临界群

令$\boldsymbol{G}$是图$P_4\cdot C_n$（见图1），为简化问题，考虑它的对偶图G^*（见图1）。选择顶点$2n+2$为根，使得$x_{2n+2}=0$，对剩余的顶点应用“倒塌”规则，得到下面的方程组：

$$\begin{cases}x_3=4x_2-x_1-2x_{2n+1},\\ x_4=4x_3-x_2,\\ x_{2i-1}=4x_{2i-2}-x_{2i-3}-2x_{2n+1}, \quad (3\leq i\leq n)\\ x_{2i}=4x_{2i-1}-x_{2i-2},\\ 2(x_1+x_3+x_5+\cdots+x_{2n-1})=0。\end{cases} \tag{1}$$

从这个方程组看到最多有3个生成元。事实上，每个x_{2i-1}和x_{2i}能够由x_1，x_2和x_{2n+1}表示。

对每个$3\leq i\leq n$，定义：

$$\begin{cases}x_{2i-1}=a_{2i-1}x_2-b_{2i-1}x_1-c_{2i-1}x_{2n+1},\\ x_{2i}=b_{2i+1}x_2-a_{2i-1}x_1-c_{2i}x_{2n-1},\end{cases}$$

可以得到下面4个递推关系：

$$\begin{cases}a_{2i-1}=4b_{2i-1}-a_{2i-3},\\ b_{2i-1}=4a_{2i-3}-b_{2i-3},\\ c_{2i-1}=4c_{2i-2}-c_{2i-3}+2,\\ c_{2i}=4c_{2i-1}-c_{2i-2},\end{cases} \tag{2}$$

$a_1=0，b_1=-1，c_1=0，c_2=0，a_3=4，b_3=1，c_3=2，c_4=8$。

由此有$\begin{cases}a_{2i-1}=2c_{2i-1}-c_{2i-2},\\ b_{2i-1}=2c_{2i-2}-c_{2i-3}+1,\end{cases}$ （3）

及$\begin{cases}c_{2i-1}=4c_{2i-2}-c_{2i-3}+2,\\ c_{2i}=4c_{2i-1}-c_{2i-2}。\end{cases}$ （4）

因此可以简化方程组（1）的关系矩阵。

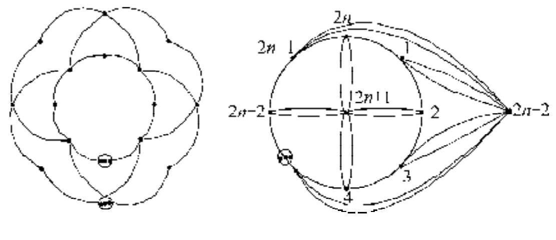

图1 $P_4\cdot C_n$和它的对偶图

Fig. 1 Graph $P_4\cdot C_n$ and one of its duals

定理2 图$P_4\cdot C_n$上的临界群的关系矩阵$\boldsymbol{A}_n$为

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix}0 & -c_{2n} & c_{2n+1}\\ 0 & -c_{2n+1} & c_{2n+2}\\ 2n & \dfrac{-2c_{2n+1}+c_{2n}-2n}{3} & \dfrac{7c_{2n-1}-2c_{2n}-2n}{3}\end{pmatrix}。$$

证 从方程组（1）、（3）和（4）可以导出生成元x_1，x_2和x_{2n+1}之间新的关系组，即

$$\begin{cases}(2c_{2n+1}-c_{2n})x_2-(2c_{2n}-c_{2n-1}+2)x_1-c_{2n+1}x_{2n+1}=0,\\ (2c_{2n+2}-c_{2n-1})x_2-(2c_{2n+1}-c_{2n})x_1-c_{2n+2}x_{2n+1}=0,\\ (4c_{2n+1}-c_{2n})x_2-c_{2n+1}x_1-\dfrac{7c_{2n+1}-2c_{2n}-2n}{3}x_{2n+1}=0。\end{cases}$$

上面联立式中$3\leq i\leq n$。

在等价意义上通过一系列的行列变换，可以证明$\boldsymbol{A}_n$是这个方程组的关系矩阵。

$$\begin{pmatrix}2c_{2n+1}-c_{2n} & 2c_{2n}-c_{2n-1}+2 & c_{2n+1}\\ 2c_{2n+2}-c_{2n+1} & 2c_{2n+1}-c_{2n} & c_{2n-2}\\ 4c_{2n+1}-c_{2n} & c_{2n+1} & \dfrac{7c_{2n-1}-2c_{2n}-2n}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -c_{2n} & c_{2n+1}\\ 0 & -c_{2n+1} & c_{2n+2}\\ 2n & \dfrac{-2c_{2n+1}+c_{2n}-2n}{3} & \dfrac{7c_{2n-1}-2c_{2n}-2n}{3}\end{pmatrix}。$$

因为$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$是幺模整矩阵，从而定理得证。

下面给出关系矩阵$\boldsymbol{A}_n$的Smith标准形$S=S_n$。对每个n，有$c_{2n+1}^2-2c_{2n+1}=c_{2n}c_{2n+2}$，$c_{2n}^2=c_{2n-1}c_{2n+1}$，因此，$\boldsymbol{A}_n$的行列式是$\det(\boldsymbol{A}_n)=4nc_{2n+1}$。

下面的引理可由数学归纳法证得。

引理1 对$n\geq 1$，有$c_{2n+1}=2h_n^2$，$c_{2n}=2h_{n-1}h_n$，

其中序列h_n定义为$\begin{cases}h_0=0,\\ h_1=1,\\ h_n=4h_{n-1}-h_{n-2}。\end{cases}$

下面给出序列h_n的一些性质。

引理2

1）对任意的n,$(h_n,h_{n+1})=1$,$(h_n+h_{n-1},h_n+h_{n+1})=1$;

2）$h_{m+n}=h_mh_{n+1}-h_{m-1}h_n$；

3）$h_{kn}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^ih_{n-1}^{k-i}h_i$；

4）$h_{kn+r}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^i h_{n-1}^{k-i}h_{r+i}$。

证　在此仅对 4）等式进行证明。

当 $k=1$ 时，$h_{n+r}=-h_{n-1}h_r+h_nh_{r+1}$ 显然成立。现在假设等式对 k 是成立的，证明对 $k+1$ 等式也是成立的。

由归纳假设及 3）等式有

$$k_{(k-1)n+r}=h_{kn+r+n}=h_{kn+r}h_{n-1}-h_{kn+r-1}h_n=$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^i h_{n-1}^{k-i}h_{r+i}h_{n+1}-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^i h_{n-1}^{k-i}h_{r-1+i}h_n=$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}h_n^i h_{n-1}^{k-i}h_{r+n-i},$$

从而 4）等式成立。

特别地，由 $h_{-1}=-1$，$h_0=0$，$h_1=1$，$h_2=4$ 和 $h_3=15$ 有 $h_{3n}=h_n\left(h_{n-1}^2-12h_nh_{n-1}+15h_n^2\right)$，$h_{3n-1}=h_{n-1}^3-3h_n^2h_{n-1}+4h_n^3$。

引理 3　对 $e\geq1$，有 $h_{2\cdot3^e}=2\cdot3^e(\mathrm{mod}\,3^{e+1})$及 $h_{2\cdot3^e-1}=3^e-1(\mathrm{mod}\,3^{e+1})$。

证　对 e 用归纳法证明此引理。

当 $e=1$，有 $h_6=6(\mathrm{mod}\ 9)$和 $h_5=2(\mathrm{mod}\ 9)$显然成立。假设引理对 $e>1$ 是成立的，则

$$h_{2\cdot3^{e+1}}=h_{3(2\cdot3^e)}=h_{2\cdot3^e}\left(3h_{2\cdot3^e-1}^2-12h_{2\cdot3^e}h_{2\cdot3^e-1}+15h_{2\cdot3^e}^2\right),$$

$$h_{2\cdot3^{e+1}-1}=h_{3(2\cdot3^e)-1}=h_{2\cdot3^e-1}^2-3h_{2\cdot3^e}^2h_{2\cdot3^e-1}+4h_{2\cdot3^e}^3。$$

又因为$12h_{2\cdot3^e}^2h_{2\cdot3^e-1}=4\cdot3\cdot\left(2\cdot3^e+a\cdot3^{e+1}\right)^2h_{2\cdot3^e-1}=$

$$4\cdot3\cdot3^{2e}(2+3a)^2h_{2\cdot3^e-1}=4\cdot3^{2e+1}(2+3a)^2h_{2\cdot3^e-1}=$$

$$0\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right),$$

$$15h_{2\cdot3^e}^3=5\cdot3\cdot\left(2\cdot3^e+a\cdot3^{e+1}\right)^3=0\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right),$$

$$3h_{2\cdot3^e}^2h_{2\cdot3^e-1}=0\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right),\ 4h_{2\cdot3^e}^3=0\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right),$$

则 $h_{2\cdot3^{e+1}}=3\cdot h_{2\cdot3^e}h_{2\cdot3^e-1}^2\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$

$$3\cdot\left(2\cdot3^e+a\cdot3^{e+1}\right)\left(3^e-1+b\cdot3^{e+1}\right)^2\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$3^{e+1}(2+3a)\left(\left(3^e-1\right)^2+2\left(3^e-1\right)b\cdot3^{e+1}+b^2\cdot3^{2e+2}\right)\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$3^{e+1}(2+3a)\left(3^e-1\right)^2\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$3^{e+1}(2+3a)\left(3^{2e}-2\cdot3^e+1\right)\ \left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$\left(3^{3e+1}-2\cdot3^{2e+1}+3^{e+1}\right)(2+3a)\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$3^{e+1}(2+3a)\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=2\cdot3^{e+1}\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right),$$

$$h_{2\cdot3^{e+1}-1}=h_{2\cdot3^e-1}^3\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=\left(3^e-1+b\cdot3^{e+1}\right)^3\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$\left(\left(3^e-1\right)^3+3b\left(3^e-1\right)^2 3^{e+1}+3\left(3^e-1\right)\left(b\cdot3^{e+1}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left(b\cdot3^{e+1}\right)^3\right)\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=\left(3^e-1\right)^3\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=$$

$$\left(3^{3e}-3\cdot3^{2e}+3\cdot3^e-1\right)\ \left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right)=\left(3^{e+1}-1\right)\left(\mathrm{mod}\,3^{e+2}\right).$$

从而得$h_{2\cdot3^e}=2\cdot3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)$，$h_{2\cdot3^e-1}=3^e-1\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)$。

引理 4　对 $e\geq1$，有$h_{2\cdot2\cdot3^e}=3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)$及 $h_{2\cdot2\cdot3^e-1}=2\cdot3^e-1\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)$。

令 $k(t)$记作序列 h_n 模 t 下的周期。

引理 5　若 $t_1\mid t_2$，则 $k(t_1)\mid k(t_2)$。

证　令 $k=k(t_2)$，需要证明 h_n（mod t_1）在长为 k 的块中重复，即证明对任意的 i，有 $h_i\equiv h_{i+k}(\mathrm{mod}\ t_1)$。显然，$h_i\equiv h_{i+k}(\mathrm{mod}\ t_2)$，所以对 $0\leq a\leq t_2$ 有 $h_i=a+t_2x$ 和 $h_{i+k}=a+t_2y$。

设 $t_2=t_1s$，在前面 2 个等式中用 t_1s 代替 t_2，则有 $h_i=a+t_1sx$ 和 $h_{i+k}=a+t_1sy$。令 $a=a'+t_1w\ (0\leq a'<t_1)$，且以此代替前面等式中的 a，可得 $h_i=a'+t_1(w+sx)$及 $h_{i+k}=a'+t_1(w+sy)$，从而可以证明 $h_i\equiv h_{i+k}\ (\mathrm{mod}\ t)$是成立的。

引理 6　$k(3^e)=2\cdot3^e$。

证　首先证明对所有的 e 有 $h_{2\cdot3^e}\equiv0$ 和 $h_{2\cdot3^e+1}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,3^e\right)$，因为$3^e\mid2\cdot3^e,3^e\mid h_{2\cdot3^e}$，则 $h_{2\cdot3^e}\equiv0$。由引理 2 有 $h_{2\cdot3^e+1}=h_{3^e+1}^2-h_{3^e}^2$，而 $h_{3^e}^2\equiv0^2\equiv0\left(\mathrm{mod}\,3^e\right)$，$h_{3^e-1}^2\equiv h_{3^e-2}h_{3^e}+1\equiv1\left(\mathrm{mod}\,3^e\right)$，从而有 $h_{2\cdot3^e}=0$ 和 $h_{2\cdot3^e+1}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,3^e\right)$，因此对所有的 e 成立$k\left(3^e\right)\mid2\cdot3^e$。

现在对 r 用归纳法证明此定理，当 $r=1$ 时成立。假设 $k(3^r)=2\cdot3^r$ 是成立的，下面证明 $k(3^{r+1})=2\cdot3^{r+1}$ 是成立的。

因为$2\cdot3^r=k\left(3^r\right)\mid k\left(3^{r+1}\right)$，且 $k\left(3^{r+1}\right)\mid2\cdot3^{r-1}$，$k\left(3^{r+1}\right)=2\cdot3^e$或$2\cdot3^{r+1}$。在第一种情况中，由引理 3 知 $h_{2\cdot3^r}\neq0\left(\mathrm{mod}\,3^{r+1}\right)$，所以必有$k\left(3^{r+1}\right)=2\cdot3^{r+1}$，从而定理得证。

引理 7　若 $3^e\mid n$，$3^{e+1}\nmid n$，则 $3^{e-1}\left|\dfrac{h_{2n}+2n}{3}\right.$ 且 $3^e\nmid\dfrac{h_{2n}+2n}{3}$。

证　令 $n=3^em$ 且 $3\nmid m$，则 $m=3y+x$（$x=1$，2），有

$$2n=2\cdot3^em=2\cdot3^e(3y+x)=2\cdot3^ex+2\cdot3^{e+1}y=$$

$$2\cdot3^ex\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)=\begin{cases}2\cdot3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),\ x=1;\\4\cdot3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),\ x=2。\end{cases}$$

而且

$$h_{2n}=h_{2(3^ex+3^{e+1}y)}=h_{2\cdot3^ex+2\cdot3^{e+1}y}=h_{2\cdot3^ex}\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right)=$$

$$\left.\begin{matrix}h_{2\cdot3^e}\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),\ x=1\\h_{2\cdot2\cdot3^e}\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),x=2\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}2\cdot3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),\ x=1\\3^e\left(\mathrm{mod}\,3^{e+1}\right),\ x=2\end{matrix}\right\},$$

得到 $h_{2n}+2n=\begin{cases}4\cdot 3^{e}\left(\bmod 3^{e+1}\right), & x=1,\\ 5\cdot 3^{e}\left(\bmod 3^{e+1}\right), & x=2,\end{cases}$ 从而

$$\frac{h_{2n}+2n}{3}=\begin{cases}4\cdot 3^{e-1}\left(\bmod 3^{e+1}\right), & x=1,\\ 5\cdot 3^{e-1}\left(\bmod 3^{e+1}\right), & x=2,\end{cases}$$

所以 $3^{e-1}\left|\dfrac{h_{2n}+2n}{3}\right.$ 且 $3^{e}\nmid\dfrac{h_{2n}+2n}{3}$。

上面已经给出了序列 h_n 的一些性质，为了得到 A_n 的 Smith 标准形 S_n，首先计算 A_n 的一阶子式的最大公因式 S_{11}。由引理 2 注意到对每个 n 有 $(h_{n-1}, h_n)=1$，由此可知 $(c_{2n}, c_{2n+1})=(2h_{n-1}h_n, 2h_n^2)=2h_n(h_{n-1}, h_n)=2h_n$，

$$S_{11}=\left(2n, c_{2n}, c_{2n+1}, \frac{2c_{2n+1}-c_{2n}+2n}{3}\right)=$$

$$\left(2n, 2h_n, \frac{4h_n^2-2h_{n-1}h_n+2n}{3}\right)。$$

因为 $4h_n^2-2h_{n-1}h_n=h_{2n}$，则有 $S_{11}=\left(2n, 2h_n, \dfrac{h_{2n}+2n}{3}\right)$。

・若 $3\nmid n$，因此 $3\nmid h_n$，有

$$S_{11}=\left(2n, 2h_n, \frac{4h_n^2-2h_{n-1}h_n+2n}{3}\right)=$$

$$\left(2n, 2h_n, \frac{2h_n\left(2h_n-h_{n-1}\right)+2n}{3}\right)=$$

$$\left(2n, 2h_n\right)=2\left(n, h_n\right)。$$

・若 $3^{e}|n$，则有 $S_{11}=\dfrac{2\left(n, h_n\right)}{3}$。

现在来计算 A_n 的二阶子式的最大公因式 $S_{11}S_{22}$，从而求得 S_{22}，因为有

$$\begin{aligned}S_{11}S_{22}=&\Big(4nh_n^2, 4nh_{n-1}h_n, 4h_n^2, 4n\left(h_n^2+h_{n-1}h_n\right), 4n\left(h_n^2+h_nh_{n+1}\right),\\ &2h_{n-1}h_n\left(6h_n^2-2h_{n-1}h_n\right)-\left(2h_n^2+2h_{n-1}h_n\right)\frac{h_{2n}+2n}{3},\\ &2h_n^2\left(\left(6h_n^2-2h_{n-1}h_n\right)-\left(2h_n^2+2h_nh_{n+1}\right)\frac{h_{2n}+2n}{3}\right)\Big)=\\ &2h_n\Big(2nh_n, 2nh_{n-1}, 2h_n, 2n\left(h_n+h_{n-1}\right), 2n\left(h_n+h_{n+1}\right),\\ &2h_nh_{n-1}\left(3h_n-h_{n-1}\right)-\left(h_n+h_{n-1}\right)\frac{h_{2n}+2n}{3},\\ &2h_n^2\left(3h_n-h_{n-1}\right)-\left(h_n+h_{n+1}\right)\frac{h_{2n}+2n}{3}\Big)=\\ &2h_n\Big(2nh_n, 2nh_{n-1}, 2h_n, 2n\left(h_n+h_{n-1}\right), 2n\left(h_n+h_{n+1}\right),\\ &\left(h_n+h_{n-1}\right)\frac{h_{2n}+2n}{3}, \left(h_n+h_{n+1}\right)\frac{h_{2n}+2n}{3}\Big)=\\ &2h_n\left(2n, 2h_n, \frac{h_{2n}+2n}{3}\right),\end{aligned}$$

因此 $S_{22}=2h_n$。

已知 $\det\left(S_n\right)=\left|\det\left(A_n\right)\right|$，所以 $S_{33}=\dfrac{4nc_{2n-1}}{S_{11}S_{22}}=\dfrac{8nh_n^2}{S_{11}S_{22}}$。因此矩阵 A_n 的 Smith 标准形 S_n 为：

・若 $3\nmid n$，$S_n=\begin{pmatrix}2(n,h_n) & 0 & 0\\ 0 & 2h_n & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2nh_n}{(n,h_n)}\end{pmatrix}$；

・若 $3|n$，$S_n=\begin{pmatrix}\dfrac{2(n,h_n)}{3} & 0 & 0\\ 0 & 2h_n & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{6nh_n}{(n,h_n)}\end{pmatrix}$。

定理 3 对 $n\geq 3$，并且 n 为奇数，图 $P_4\cdot C_n$ 的临界群为：

当 $3\nmid n$ 时，$K\left(P_4\cdot C_n\right)\cong\mathbb{Z}_{2(n,h_n)}\oplus\mathbb{Z}_{2h_n}\oplus\mathbb{Z}_{\frac{2nh_n}{(n,h_n)}}$；

当 $3|n$ 时，$K\left(P_4\cdot C_n\right)\cong\mathbb{Z}_{\frac{2(n,h_n)}{3}}\oplus\mathbb{Z}_{2h_n}\oplus\mathbb{Z}_{\frac{6nh_n}{(n,h_n)}}$。

其中序列 h_n 定义为 $h_0=0$，$h_1=1$，$h_n=4h_{n-1}-h_{n-2}$。

参考文献：

[1] Biggs N L. Chip-firing and the critical group of a graph[J]. Algebraic Combin.，1999(9)：25-45.

[2] Dhar D，Ruelle P，Sen S，et al. Algebraic aspects of abelian sandpile models[J]. J. Phys. A，1995，28：805-831.

[3] Jacobson B，Niedermaier A，Reiner V. Critical groups for complete multipartite graphs and Cartesian products of complete graphs[J]. Journal of Graph Theory，2003，44：231-250.

[4] Dartois A，Fiorenzi F，Francini P. Sandpile group oa the graph D_n of the dihedral group[J]. European J. Combin.，2003，24：815-824.

[5] Christianson H，Reiner V. The critical group of a threshold graph[J]. Linear Algebra Appl.，2002，349：233-244.

[6] Godsil C，Royle G. Algebraic Graph Theory，GTM 207 [M]. New York：Springer-Verlag，2001.

[7] Cori R，Rossin D. On the sandpile group of dual graphs[J]. European J. Combin.，2000，21：447-459.

[8] Lorenzini D J. A finite group attached to the Laplacian of a graph[J]. Discret Math.，1991，91：277-282.

（责任编辑：张亦静）