

介观有源 RLC 串联电路的量子化

谢月新

(湘南学院物理系, 湖南 郴州 423000)

摘要: 通过引入一种满足条件的新正则变换, 研究了介观有源 RLC 串联电路的量子化, 得出了研究系统量子效应一般规律的态函数, 并进一步研究了压缩真空态电荷和广义电流的量子涨落, 提出了量子噪声可以加以利用的观点。

关键词: 有源 RLC 串联电路; 量子化; 正则变换

中图分类号: TN201

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2008)01-0078-04

Quantization for Mesoscopic RLC Circuit with Source by Series-Mounting

XieYuexin

(Department of Physics, Xiangnan College, Chenzhou Hunan 423000, China)

Abstract: The quantization of a general mesoscopic RLC circuit with source by series-mounting is studied by using a new canonical transformation satisfied condition. After the research, it obtained the state function to study the general rules of quantum effects, and further investigated the quantum fluctuations of the charge and generalized current in the squeezed vacuum state. A viewpoint is brought forward that the quantum-noise can be used.

Key words RLC circuit with source by series-mounting; quantization; canonical transformation

0 引言

随着纳米技术的发展, 在电子器件中, 电路及器件的小型化和高集成度的趋势越来越显著, 近年来已经达到了原子尺寸的量级^[1]。当电路的尺寸小到与电子的相干长度可比拟时, 电路本身的量子效应就会显现出来, 原来在研究电路时所采用的一系列经典的基本原理和方法不再成立, 因而人们对介观电路的量子效应的研究表现出浓厚兴趣^[2, 3]。自 20 世纪 70 年代 Louisell 研究了 LC 电路的量子效应以来^[4], 人们先后研究了各种介观电路的量子化问题^[5-10], 包括电荷的离散性^[5, 6]等。近年来, 崔元顺给出了介观 LC 电路在真空态和压缩真空态下电压、电流的量子涨落^[11]。更普遍的 RLC 电路对应着力学中的阻尼谐振子, 其量子力

学处理存在一些困难, 陈斌等^[12]和顾永建^[13]先后对这一问题进行了研究, 但均没有给出系统的态函数, 而系统的态函数对研究量子效应的一般规律有着重大意义, 且文献^[13]的作者说文献^[12]的结论“至少在量纲上不合理”。而文献^[13]的作者在研究过程中“令 $[Q, P] = i\hbar$ ”, 并可证明其文中的正则共轭变量 u 、 v 直观上不满足正则变换的条件。本文在此基础上, 引入一种满足条件的新的正则变换, 并证明了 $[Q, P] = i\hbar$, 进而研究了具有一般性的介观有源 RLC 串联电路的波函数和量子涨落。文献^[13]认为, “电荷、电流的量子涨落之积与电路参数 R 、 L 、 C 及压缩参数 r 、 θ 有关, 因而可通过适当的参数选择来降低所需电学量的量子噪声”, 而本文认为, 这种量子噪声是可以加以利用的。

收稿日期: 2007-10-16

基金项目: 湘南学院科研基金资助项目 (2007Y026)

作者简介: 谢月新 (1969-), 男, 湖南郴州人, 湘南学院讲师, 主要研究方向为物理电子学。

1 电路的量子化及体系的时间演化量态

考虑一个有源RLC串联电路,根据基尔霍夫定律,其经典运动方程为:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = \varepsilon(t), \quad (1)$$

式(1)中, q 、 L 和 C 分别是回路的电荷、电感和电容, ε 是电压源。

令 $P=L\dot{q}$, (“ \cdot ”表示对时间 t 的导数),可以证明^[13]

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{R}{L}, \quad (2)$$

式(2)表明,在一个有源RLC串联电路($R \neq 0$)中, q 和 p 不再构成经典力学中的正则共轭变量^[13, 14],为此,文献[13]引入了如下正则变换

$$q = ue^{-Rt/2L}, \quad p = \left(v - \frac{R}{2}u \right) e^{-Rt/2L}, \quad (3)$$

式(3)中, u 、 v 为文献[13]的正则共轭变量,可以证明 $\{u, v\} = e^{Rt/L} \neq 1$,
其中,“ $\{\}$ ”为泊松括号,式(4)表明, u 、 v 直观上不满足正则变换的条件^[15]:

$$\{Q_j, Q_k\} = \{P_j, P_k\} = 0, \quad \{Q_j, P_k\} = \delta_{jk}, \quad (j, k=1, 2, \dots), \quad (5)$$

当然,这并不是要否定这种变换,因这种变换可称为相空间的变换,而相空间的变换如果能保证Hamilton方程的正则形式不变,亦可称为正则变换^[15],但值得进一步研究和证明。为此,引入如下新的正则变换^[13, 14]:

$$Q = qe^{\lambda t/2}, \quad P = L\dot{Q}e^{-\lambda t/2} = (p + Rq/2)e^{-\lambda t/2}. \quad (6)$$

式(6)中, $\lambda = R/L$,可以证明这种变换满足正则变换的条件 $\{Q, P\} = 1$,
根据Dirac理论^[15],经典Poisson括号应代之为:

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}(AB - BA) = \frac{1}{i\hbar}[A, B], \quad (8)$$

所以式(7)可转化为对易关系 $[Q, P] = i\hbar$,
将式(6)代入式(1)可得:

$$L\ddot{Q} + \left(\frac{1}{C} - \frac{R}{4L} \right) Q - \varepsilon(t)e^{\lambda t/2} = 0, \quad (10)$$

由式(6)可得:

$$\dot{Q} = \frac{P}{L}e^{\lambda t/2}, \quad \dot{P} = L\ddot{Q}e^{-\lambda t/2} - R\dot{Q}e^{-\lambda t/2}, \quad (11)$$

由式(11)可以证明 $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = 0$,
式(12)表明, Q 和 P 为正则共轭变量。所以正则变换后,式(1)所对应的经典哈密顿量为:

$$H = \frac{P^2}{2L} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{4L} \right) Q^2 - \varepsilon(t)Qe^{\lambda t/2}. \quad (13)$$

把式(13)量子化,意味着将经典变量 Q 和 P 表示为算符。为简便,令 $\omega^2 = 1/LC - R^2/4L^2$, $\varepsilon'(t) = \varepsilon(t)e^{\lambda t/2}$,

则式(13)可表示为 $H = \frac{P^2}{2L} + \frac{1}{2}L\omega^2 Q^2 - \varepsilon'(t)Q$. (14)

根据式(9)可构造如下升降算符:

$$a = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} \left(Q + \frac{i}{L\omega} P \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} \left(Q - \frac{i}{L\omega} P \right). \quad (15)$$

此算符满足对易关系^[13, 17] $[a, a^\dagger] = 1$,于是式(14)可写

$$\text{作: } H' = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}} (a + a^\dagger) \varepsilon'(t). \quad (16)$$

为了求得体系的时间演化量态,作如下构建^[16]:

$$\beta(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}} \int_0^t \frac{\partial \varepsilon'(\tau)}{\partial(\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (17)$$

则式(16)可表示为:

$$H' = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \beta(t)a + \beta^*(t)a^\dagger. \quad (18)$$

利用 $[a, a^\dagger] = 1$,可定义真空态 $|0\rangle$,借助压缩算符 $S(\xi) = e^{(\xi^* a^2/2 - \xi a^{*2}/2)}$,不难定义压缩真空态 $|0\rangle_g = S(\xi)|0\rangle$,其中 $\xi = re^{i\theta}$, r 为压缩因子($0 \leq r < \infty$), θ 为压缩角^[13]。若 $t=0$ 时系统处于真空态 $|0\rangle$ (压缩因子 $r=0$),则利用相干态平均方法可以求得 t 时刻系统的状态为^[17]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-B(t)} e^{L-i\eta(t)} e^{-i\omega a^\dagger a} e^{-i\omega a^\dagger a} e^{-i\eta(t)a} |0\rangle, \quad (19)$$

可见这是一个相干态 $|\alpha\rangle$ 。其中:

$$B(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \beta(\tau') e^{i\omega(\tau-\tau')} \beta^*(\tau'),$$

$$\eta(t) = \int_0^t d\tau \beta(\tau) e^{i\omega\tau}.$$

2 压缩真空态下电荷、电流的量子涨落

在未接通电源时,式(18)中的 $\beta(t)=0$,可假设此时电路处于压缩真空态 $|0\rangle_g$,该态在粒子数表象中可以表示为^[18]:

$$|0\rangle_g = \text{sech } \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e^{i\theta} \tanh v)^n [(2n)!]^{1/2}}{n! 2^n} |2n\rangle. \quad (20)$$

由式(6)和式(15)可解得: $q = \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}} e^{-\lambda t/2} (a^\dagger + a)$,

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar L\omega}{2}} e^{\lambda t/2} (a^\dagger - a) - \frac{Rq}{2}, \quad (21)$$

$$q^2 = \frac{\hbar}{2L\omega} e^{-\lambda t} (a^{*2} + a^2 + 2a^*a + 1), \quad (22)$$

$$p^2 = \frac{\hbar L\omega}{2} e^{\lambda t} (-a^{*2} - a^2 + 2a^*a + 1) + \frac{R^2 q^2}{4} - \frac{i\hbar R}{2} (a^{*2} - a^2). \quad (23)$$

我们考查一个脉冲电源作用下的情形,其周期为 $T = \rho_1 + \rho_2$,其中 ρ_1 表示脉冲宽度, ρ_2 表示间歇宽度,当 $\rho_1 \rightarrow 0$ 时,由式(20)~(23)可得:

$${}_g\langle 0|q|0\rangle_g = 0, \quad {}_g\langle 0|p|0\rangle_g = 0, \quad (24)$$

$${}_g\langle 0|q^2|0\rangle_g = \frac{\hbar}{2L\omega} e^{-\lambda} \sec \hbar r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hbar^2 r (2n)!)^2}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot [4n+1-2(2n+1)\tanh \hbar r \cos \theta], \quad (25)$$

$${}_g\langle 0|p^2|0\rangle_g = e^{\lambda} \sec \hbar r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hbar^2 r (2n)!)^2}{(n!)^2 2^{2n}} \left\{ \left[\left(\frac{\hbar L\omega}{2} + \frac{\hbar R^2}{8L\omega} \right) + 2(2n+1)\tanh \hbar r \left[\frac{\hbar\omega}{2} \cos \theta - \frac{\hbar R^2}{8L\omega} \cos \theta + \frac{\hbar R}{2} \sin \theta \exp(-\lambda t) \right] \right\} \right\}. \quad (26)$$

可见, ${}_g\langle 0|q|0\rangle_g$, ${}_g\langle 0|p|0\rangle_g$ 及电荷涨落 ${}_g\langle 0|q^2|0\rangle_g$

与文献[13]的结果相同, 而广义电流 ${}_g\langle 0|p^2|0\rangle_g$ 的量子涨落不同于文献[13]中的式(27): 一方面, 最后一个因子不遵循 $\lambda = R/L$ 的指数规律; 另一方面, 本文的结果遵循正指数规律, 而文献[13]的结果中, 各个因子均遵循负指数规律。笔者进一步研究发现, ${}_g\langle 0|p^2|0\rangle_g$ 为离散值, 这可从如下两个方面得到证实: 一方面, 当 $\rho_1 \rightarrow 0$ 时, 式(26)是收敛的; 另一方面, 量子效应的产生是需要满足一定条件的。西安交通大学丁秉钧教授认为, 出现量子效应的判据是^[19]

$$E_g > K_B T. \quad (27)$$

式(27)中, E_g 为能隙, $K_B T$ 为热起伏能。从物理过程来看, 在一个脉冲周期内, 当 $\rho_1 \rightarrow 0$ 时, 脉冲电源给予系统能量, 需要这一能量足够大, 满足量子效应判据时量子效应才会产生, 并发生按式(26)规律变化的量子涨落, 只要系统中电荷的储能还能满足量子效应判据, 这种效应就可以持续到 ρ_2 期间的前一段时间。与此同时, 系统中的电荷涨落按指数规律减小, 当系统中的电荷涨落减小到其储能不能满足量子效应的判据时, 量子效应就会停止, ${}_g\langle 0|p^2|0\rangle_g$ 达到极大值。此后, 因量子效应已停止, 系统中的电流将按经典的耗散规律(负指数规律^[20])下降, 当不满足要求时, 需下一个脉冲到来给系统再次补充能量, 量子效应才会再次产生。这样, 我们就可以有效地利用量子效应电流——即借助正指数规律增长的量子效应电流补偿负指数规律下降的经典耗散电流, 代替或部分代替经典电子技术中因RLC电路中R的耗能的存在, 需不断为RLC系统补充能量的放大电路。经典电子电路中如果没有放大电路, 随着RLC电路级数的增多, 信号将逐渐下降, 这已是不争的事实。系统中电源、电荷涨落及储能、广义电流涨落、经典耗散电流的关系示意图见图1。因此, ${}_g\langle 0|p^2|0\rangle_g$ 的值是离散的。

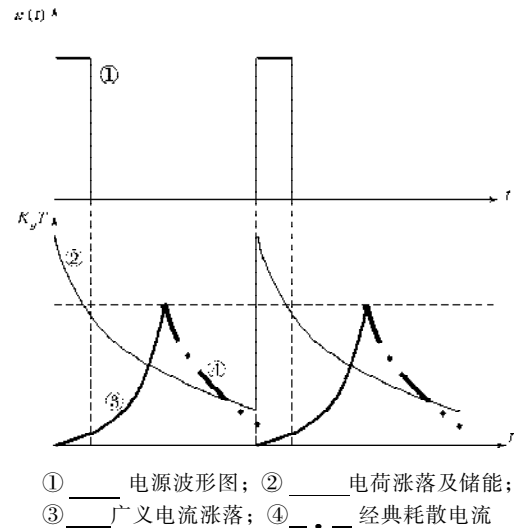


图1 系统中电源、电荷涨落及储能、广义电流涨落、经典耗散电流的关系示意图

Fig. 1 The correlative diagram of the power supply, the qu-antum fluctuations of the charge and it's energy, the quantum fluctuations of the generalized current and the classical dissipation current in the system

3 结语

通过引入一种满足条件的新的正则变换, 研究了具有一般性的有源RLC串联电路的量子化, 用相干态平均方法得出了系统在这种变换下处于真空态的态函数, 发现这是一个相干态 $|\alpha\rangle$ 。并进一步研究了压缩真空态电荷和广义电流的量子涨落, 结果与文献[13]有较大差别, 而式(26)仅代表广义电流的量子涨落的增长规律, 其值是离散的, 符合物理学的讨论范畴, 且提出了量子噪声可以加以利用的观点。因此, 本文的结论可能对研究同类问题具有一定的参考价值。

参考文献:

- [1] Cui Y S, Zhou H L. Quantum loop equation and the energy spectrum of the inductance-coupling mesoscopic circuit[J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2006, 23(1): 77-82.
- [2] Ruan W, Lei M S, Ji Y H. Squeezing effects of the mesoscopic LC circuit[J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2005, 22(2): 227-231.
- [3] Ruan W, Lei M S, Ji Y H, et al. Quantum effects in a mesoscopic nonlinear electronic circuit[J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2005, 22(1): 63-69.
- [4] Wang Z Q. Quantum fluctuations of a mesoscopic RLC electric circuit in thermal coherent states and thermal squeezed states[J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2005, 22(5): 0732-0735.
- [5] Li Y Q, Chen B. Quantum theory for mesoscopic electric

- circuit[J]. Physical Review B., 1996, 53(7): 4027-4032.
- [6] Flores J C, Utreras-Diaz C A. Mesoscopic circuits with charge discreteness: Quantum current magnification for mutual inductances[J]. Phys. Rev. B., 2002, 66(15): 1534101-1534104.
- [7] Ji Y H, Luo H M, Liu Q, et al. Thermodynamics of squeezed states in mesoscopic circuits[J]. Chinese Physics, 2005, 14(6): 1227-1231.
- [8] Wang J S, Feng J, Zhan M S. Coulomb blockade and quantum effects of charge in a nondissipative mesoscopic inductance-coupling circuits[J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(2): 299-303.
- [9] Chen B, Li Y Q, Fang H, et al. Quantum effects in a mesoscopic circuit[J]. Physics Letters A., 1995, 205(4): 121-124.
- [10] Luo H M, Liu G, Xu L, et al. Quantum fluctuation of mesoscopic distributed parameter circuit[J]. Chinese Physics, 2004, 13(10): 1766-1769.
- [11] Cui Y S, Hu J, Zhou H L. The quantum effect of the mesoscopic circuit with capacitive coupling under the excited states of squeezed vacuum states[J]. Acta Photonica Sinica, 2001, 30(12): 1500-1503.
- [12] Chen B, Fang H, Jiao Z K. Quantum fluctuation of charge and current in a mesoscopic circuit[J]. Chinese Science Bulletin, 1996, 41(13): 1170-1172.
- [13] Gu Y J. Quantum fluctuations of charge and current in mesoscopic RLC circuit in squeezed vacuum state[J]. Acta Physica Sinica, 2000, 49(5): 965-968.
- [14] Peng H W. Quantum mechanical treatment of a damped harmonic oscillator[J]. Acta Physica Sinica, 1980, 29(8): 1084-1089.
- [15] 曾谨言. 量子力学 (卷 II)[M]. 3 版. 北京: 科学出版社, 1997: 674-681.
- [16] Song T Q. Quantization of dissipative mesoscopic capacitance coupling circuit[J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(5): 1352-1356.
- [17] 范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997: 19-25.
- [18] 彭金生, 李高翔. 近现代量子光学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 184-185.
- [19] Weng S S. The quantum effect device is rising abruptly[J]. Electronics and Packaging, 2005, 5(7): 1681-1700.
- [20] 李瀚荪. 电路分析基础(中册)[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1993: 141-150.

(责任编辑: 廖友媛)

(上接第 60 页)

例 1 考虑差分方程 $\Delta \left(x(n) - \frac{1}{3} x(n-\tau(n)) \right) = \frac{1}{2} x(n) - \frac{2 - \sin^2 \frac{2n\pi}{3} - x(n-\tau(n))}{200}$. (4)

其中 $\tau: Z \rightarrow Z$ 是 3 周期函数。

取 $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{1}{5}$, 不难验证 $G(n, s) = \frac{27}{19} \left(\frac{2}{3} \right)^{s-n}, \gamma = \frac{19}{9}$ 。

于是 $\lambda + \gamma\mu < 1$, 式 (4) 有唯一的 3 周期解。

参考文献:

- [1] Stavroulakis I. Oscillation of delay difference equations[J]. Computer Math Applic, 1995, 299(7): 83-88.
- [2] Yu J S. Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay[J]. Computer Math Appl, 1998, 36: 203-210.
- [3] Zhang D C, Shi B, Gai M J. Global asymptotic stability of a nonlinear second order difference equation[J]. Indian J Purn Appl Math, 2004, 35(7): 867-872.
- [4] Raffoul Y N. Positive periodic solutions of nonlinear functional difference equations[J]. Electron. J. Differential Equations, 2002, 55: 1-8.
- [5] 高英. 时滞差分方程周期正解的存在性[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(2): 155-162.
- [6] 郭志明, 庾建设. 二阶超线性差分方程周期解与次调和解的存在性[J]. 中国科学: A 辑, 2003, 33(2): 226-235.
- [7] Lu Shiping, Ge Weigao, Zheng Zuxiou. Periodic Solutions to a neutral functional differential equation with deviating arguments[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 152(1): 17-27.
- [8] Lu ShiPing, Ge Weigao. Periodic solutions for a kind of second order differential equations with multiple deviating arguments[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 146: 195-209.
- [9] 郭大均, 孙经先. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1995.

(责任编辑: 罗立宇)