第22卷第1期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.22 No.1
2008年1月 Journal of Hunan University of Technology Jan. 2008

一类中立型差分方程的周期解

刘宁元

（株洲职业技术学院，湖南 株洲 412000）

摘 要： 讨论了一类中立型差分方程周期解的存在性, 应用不动点定理，得到中立型差分方程周期解存在的充分条件。

关键词： 差分方程；正周期解；不动点定理

中图分类号： O175.8 **文献标识码：** A **文章编号：** 1673-9833(2008)01-0059-02

Periodic Solutions for a Class of Neutral Difference Equations

Liu Ningyuan

（Zhuzhou Professional Technology College, Zhuzhou Hunan 412000, China）

Abstract: The existence of periodic solutions for a class of neutral difference equations is discussed. By using a fixed point theorem, several sufficient conditions for the existence of periodic solutions to the equation are also gained.

Key words: periodic solutions; difference equation; fixed point theory

近年来，人们对差分方程定性性质的研究日益广泛，可参见相关文献[1-3]。在定性性质中，周期解的存在性一直是研究的重要课题之一。如文献[4-6]考虑了非线性差分方程周期解的存在性与多解性。

本文探讨差分方程

$$\Delta(x(n)-g(n,x(n-\tau(n))))=a(n)x(n)-f(n,x(n-\tau(n))) \tag{1}$$

周期解的存在性，其中 $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$，$\tau: Z\to Z$。g, f：$Z\times R\to R$ 是连续的且 a, τ 和 g，f 关于 n 是 ω 周期的函数。

方程（1）对应的微分方程为

$$(x(t)-G(t,x(n-\tau(t))))'=A(t)x(t)-f(t,x(t-\tau(t))),$$

$t\in R$。

关于中立型微分方程的周期解研究已有较多的结果[7, 8]。处理连续型变量方程时迭合度理论是讨论周期解存在性的主要工具之一，但迭合度理论不适用中立型差分方程，所以中立型差分方程周期解的研究结果很少。本文应用不动点定理，得到式（1）存在周期解的若干充分条件。

1 预备工作

设 $X=\{x:Z\to R, x(n+\omega)=x(n)\}$，则当范数为 $\|x\|=\sup_{0\le n\le\omega}|x(n)|$ 时，X 是Banach空间。设 $\alpha\in X, \beta\in X$，考虑方程 $x(n+1)=\alpha(n)x(n)-\beta(n)$。（2）

引理 1 若 $\prod_{i=1}^{\omega}\alpha(i)\ne 1$，则式（2）有唯一的周期解 $x(n)=\sum_{s=n}^{n-\omega-1}\left(\prod_{m=n}^{s}\frac{1}{\alpha(m)}\right)\left(1-\prod_{m=0}^{\omega-1}\frac{1}{a(m)}\right)^{-1}\beta(s)$。

设 x 是式（1）的一个周期解，由此可得

$$\begin{aligned}&x(n+1)-g(n+1,x(n+1-\tau(n+1)))=\\&(1+a(n))(x(n)-g(n,x(n-\tau(n))))-\\&f(n,x(n-\tau(n)))+a(n)g(n,x(n-\tau(n)))\ 。\end{aligned}$$

由引理1得：

$$x(n)=g(n,x(n-\tau(n)))+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,x(s-\tau(s))),$$

其中 $G(n,s)=\left(\prod_{m=n}^{s}\frac{1}{1+a(m)}\right)\left(1-\prod_{m=0}^{\omega}\frac{1}{1+a(m)}\right)^{-1}$，

收稿日期： 2007-10-29

作者简介： 刘宁元(1974-)，男，湖南衡阳人，株洲职业技术学院讲师，湖南师范大学硕士生，主要从事微分方程方面的研究.

$F(n,u)=f(n,u)+a(n)g(n,u)$。

定义算子T：$X\to X$，$(Tx)(n)=(Kx)(n)+(Sx)(n)$，其中$(Tx)(n)=g(n,x(n-\tau(n)))$，

$$(Sx)(n)=\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,x(s-\tau(s)))。$$

引理 2 $x\in X$是式（1）的周期解，当且仅当$x\in X$是T的不动点。

证明 必要性由引理1可得。充分性证明如下。

设$x\in X$是T的不动点，即$Tx=x$，于是

$$x(n)=g(n,x(n-\tau(n)))+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,x(s-\tau(s)))。$$

由计算得 $\Delta(x(n)-g(n,x(n-\tau(n)))=$
$$a(n)x(n)-f(n,x(n-\tau(n)))。$$

则x是式（1）的一个解，x又是ω周期的，x是式（1）的周期解。

引理 3[9] 设X是Banach空间Ω的闭凸集。K，S：$\Omega\to X$满足下列条件：1）对任意的x，$y\in\Omega$，$Kx+Sy\in\Omega$；2）K是压缩算子；3）S是全连续的。则$K+S$在Ω中有一个不动点。

2 主要结果

引入下述条件：

（H_0）当$n\in[0,\omega-1]$时，$a(n)\neq-1,\prod_{i=1}^{\omega}(1+a(i))\neq1$；

（H_1）$|g(n,u)-g(n,v)|\le\lambda|u-v|,\forall u,v\in R,n\in[0,\omega]$；

（H_2）$|F(n,u)-F(n,v)|\le\mu|u-v|,\forall u,v\in R,n\in[0,\omega]$；

$$\gamma=\max_{n\in[0,\omega-1]}\left|1-\prod_{m=1}^{\omega}\frac{1}{1+a(m)}\right|^{-1}\sum_{s=n}^{n+\omega-1}\prod_{m=n}^{s}\frac{1}{|1+a(m)|}。$$

定理 1 假设（H_0）~（H_2）成立。记
$\alpha=\max_{n\in[0,\omega-1]}|g(n,0)|,\beta=\max_{n\in[0,\omega-1]}|F(n,0)|$。

如果存在常数$M>0$，使得
$$\lambda M+\alpha+\gamma(\mu M+\beta)<M,\tag{3}$$
则方程（1）至少有一个ω周期解$x(t):|x|\le M$。

证明 设$\Omega=\{x\in X,|x(n)|\le M,\forall n\in[1,\omega]\}$，则$\Omega$是$X$中的闭凸集。

考察T，由式（3）知$\lambda<1$。对任意的x，$y\in X$，
$$\|(Kx)(n)-(Ky)(n)\|=$$
$$\|g(n,x(n-\tau(n)))-g(n,y(n-\tau(n)))\|\le\lambda\|x-y\|,$$
于是$K:\Omega\to X$是压缩的。

由f是连续函数可知S是连续的，X又是有限维，易知S是相对紧的，所以S是全连续的。

对任意的x，$y\in\Omega$，$Kx+Sy\in\Omega$，设x，$y\in\Omega$，则
$$\|(Kx)(n)+(Sy)(n)\|=$$
$$\left\|g(n,x(n-\tau(n)))+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,y(s-\tau(s)))\right\|\le$$
$$\lambda M+\alpha+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}|G(n,s)||F(s,y(s-\tau(s)))|\le$$
$$\lambda M+\alpha+\gamma(\mu M+\beta)<M。$$

使用引理2，式(1)有一个周期解x：$-M\le x(n)\le M$。

定理 2 假设(H_0)~(H_2)成立，设$\lambda+\gamma\mu<1$，则方程（1）有唯一的ω周期解。

证明 对任意的x，$y\in X$，
$$\|(Kx)(n)-(Ky)(n)\|=$$
$$\|G(n,x(n-\tau(n)))-G(n,y(n-\tau(n)))\|\le\lambda\|x-y\|,$$
$$\|(Sx)(n)-(Sy)(n)\|=$$
$$\left\|\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)\{F(s,x(s-\tau(s)))-F(s,y(s-\tau(s)))\}\right\|\le$$
$$\gamma\mu\|x-y\|。$$

于是$\|Tx-Ty\|\le(\lambda+\gamma\mu)\|x-y\|$，$T$是压缩的。由Banach不动点定理知，式（1）有唯一周期解。

定理 3 设$a(n)>0$和$g(n,u)=cu(c\in(0,1))$，且存在常数$M>m\ge0$，使得对任意的$u\in[m,M]$和$n\in Z$，$(1-c)ma(n)\le F(n,u)\le(1-c)Ma(n)$，则方程（1）至少有一个$\omega$周期解$x\in[m,M]$。

证明 让$\Omega=\{x\in X,x(n)\in[m,M],n\in[1,\omega]\}$，则$\Omega$是$X$中的闭凸集。

考察算子T，由$0<c<1$知K:$\Omega\to X$是压缩的，由f是连续函数可知S是连续的。

由X是有限维知S是相对紧的，故S是全连续的。

对任意的x，$y\in\Omega$有$Kx+Sy\in\Omega$。设x，$y\in\Omega$，则
$$(Kx)(n)+(Sy)(n)=cx(n-\tau(n))+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,y(s-\tau(s)))\le$$
$$cM+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)a(s)\frac{F(s,y(s-\tau(n)))}{a(s)}\le$$
$$cM+(1-c)M\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)a(s)=cM+(1-c)M=M,$$
$$(Kx)(n)+(Sy)(n)=cx(n-\tau(n))+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)F(s,y(s-\tau(s)))\ge$$
$$cm+\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)a(s)\frac{F(s,y(s-\tau(n)))}{a(s)}\ge$$
$$cm+(1-c)m\sum_{s=n}^{n+\omega-1}G(n,s)a(s)=cm+(1-c)m=m。$$

应用引理2，式（1）有一个ω周期解$x\in[m,M]$。

定理 4 假设$a(n)>0$和$g(n,u)=cu(c\in(-1,0))$，且存在常数$M>m\ge0$，使得对任意的$u\in[m,M]$和$n\in Z$，$(m-cM)a(n)\le F(n,u)\le(M-cm)a(n)$，则方程（1）至少有一个$\omega$周期解$x\in[m,M]$。 （下转第81页）