一种AHP中群体决策逆判问题的新方法

韦美雁

（湖南科技学院 信息与计算机系，湖南 永州 425006）

摘　要： 为了研究AHP中的逆判问题，利用模糊关系对AHP中群体决策的一致性给出了判断方法，即由一致性系数构造模糊关系矩阵，对其一致性进行分类，当分类情况基本一致时，则专家们给出的判断矩阵是公平公正的。通过算例验证了方法的可行性，并对AHP中的逆判问题提出了一种新算法，定义了新的一致性系数，经算例验证与相关文献的结果是一致的。

关键词： AHP；一致性；分类；模糊关系矩阵

中图分类号： O159　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1673-9833(2008)01-0056-03

New Method for the Opposite Judgement Problem of Group Decision in AHP

Wei Meiyan

（Department of Information and Computer, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan 425006, China）

Abstract: In view of the problem of the opposite judgement in AHP, a new method of judgement for the consistency of group decision by using fuzzy relation matrix is offered and the consistency of group decision is also classified. When the classification is in consistency, the judgement for the matrix is proved fair. By testifying the feasibility of the method through practical examples, a new algorithm for opposite judgement in AHP defines a new consistency coefficient. The result is proved to be in consistency with the findings in correlate reference through practical examples.

Key words: AHP; consistency; classification; fuzzy relation matrix

利用层次分析法（AHP）解决问题的关键是如何建立判断矩阵。判断矩阵的确定均由专家组经过多次打分、协调确定，但由于每位专家对评判对象的了解程度不同及各自的偏好，所以由群体统一建立判断矩阵很难达成一致意见[1]。根据相关的科学方法进行定量分析，反过来评判专家，即所谓逆判问题。关于逆判问题近年来也有人研究，文献[2]利用平均数来确定模糊相似系数，文献[3]则是利用中位数来反映专家的一致性系数，构造模糊关系矩阵。中位数与平均数都是从不同的角度去描述一组数据的集中趋势，从算法分析来看，利用平均数或中位数建立专家的一致性系数时，通过排序，将意见基本一致和意见分歧较大的情况忽略了，集中考虑意见相对较集中的情况。因而，在对传递闭包进行分类时较为简单。本文则采用不同于文献[2]、[3]中给定的方法确定模糊相似系数，并提出了一种新的评判方法。

1　关于AHP的预备知识

1.1　正互反矩阵 A

比较 n 个因子 B_1，B_2，…，B_n 对某因素 F 的影响大小，通常采取对因子进行两两比较的办法，建立成对比较矩阵。设 a_{ij} 表示因子 B_i 和 B_j 对因素 F 的影响大小之比，再设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 A 为判断矩阵或成对比较矩阵。显然，矩阵 A 具有性质：

$a_{ij}>0,\ a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}},\ i\neq j,\ a_{ii}=1,\ i,j=1,2,\cdots,n$，则称 A 为

收稿日期： 2007-09-24

基金项目： 湖南省教育厅科研基金资助项目（06C367）

作者简介： 韦美雁（1974-），女，湖南永州人，湖南科技学院副教授，中南大学硕士生，主要从事地理信息系统及系统科学研究.

正互反矩阵。

1.2　完全一致阵

如果一个正互反矩阵 A 满足：

$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$，$i, j, k = 1,2,\cdots, n$，

则称 A 为完全一致阵。

1.3　权向量

设 $B = (b_{ij})_{n\times n} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，其中矩阵 B 中元素为 A 中元素按列向量归一化而得到，即

$b_{kj} = \dfrac{a_{kj}}{\sum_i a_{ij}}$，$i$，$j$，$k$=1，2，…，$n$。$b_j$ 表示 B 中的第 j 个列向量，即 b_j=（b_{1j}，b_{2j}，…，b_{nj}）$^{\mathrm{T}}$。

1.4　特征向量的性质

定理1[2]　设 W=（w_1，w_2，…，w_n）为 A 的最大特征根所对应的归一化特征向量。当判断矩阵 A 为完全一致性矩阵时，B 中的每一个列向量 b_j=W（j=1，2，…，n），即每一个 b_j 均为 A 的最大特征根 n 所对应的归一化向量。

2　关于模糊数学的预备知识

2.1　模糊相似矩阵

设论域 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$R \in \mu_{n\times n}$，$I$ 为单位矩阵，若 R 满足：

1）自反性 $I \le R (\Leftrightarrow r_{ii} = 1)$；

2）对称性 $R^{\mathrm{T}} = R (\Leftrightarrow r_{ij} = r_{ji})$，则称 R 为模糊相似矩阵。

2.2　模糊等价矩阵

设论域 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$R \in \mu_{n\times n}$，$I$ 为单位矩阵，若 R 满足：

1）自反性 $I \le R (\Leftrightarrow r_{ii} = 1)$；

2）对称性 $R^{\mathrm{T}} = R (\Leftrightarrow r_{ij} = r_{ji})$；

3）传递性 $R \cdot R \le R (\Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \le r_{ij})$。则称 R 为模糊等价矩阵。

2.3　模糊相似矩阵与模糊等价矩阵的关系

定理2[4]　设 $R \in \mu_{n\times n}$ 是模糊相似矩阵，则存在一个最小的自然数 $k(k \le n)$，使得传递闭包 $t(R) = R^k$，对于一切大于 k 的自然数 l，恒有 $R^l = R^k$，此时，$t(R)$为模糊等价矩阵。

3　评判方法

前面说明当判断矩阵 A 为完全一致阵时，将 A 按列归一化后的矩阵 B 中的每一列向量本身就是 A 的最大特征根所对应的归一化向量。在实际应用中，由于每位专家各自建立一个判断矩阵，且判断矩阵一般不是完全一致性矩阵[5]，因此，专家各自建立的判断矩阵之间必定存在着分歧。下面研究的是多位专家判断意见一致性问题。

设有 m 位专家，对 n 个评判对象关于某个单因素进行判断（按AHP中1~9尺度）。令第 k 位专家所建立的判断矩阵为$A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$，并设第 k 位专家给出的判断矩阵相应的归一化向量为其排序向量：

$w^k = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \cdots, w_n^{(k)}), (k = 1,2,\cdots,m)$，

利用 m 位专家的排序向量构成排序向量矩阵：

$B = (w_j^{(k)})_{m\times n}, (k = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$。

定义1　设 $u(k,r) = 1 - \dfrac{1}{m}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(w_j^{(k)} - w_j^{(r)}\right)^2}$，则称 u（k，r）为第 k 位与第 r 位专家的一致性系数。

容易验证该定义下的 u（k，r）都具有以下性质：

1）模糊性 $0 \le u(k,r) \le 1$；

2）对称性 $u(k,r) = u(r,k)$；

3）自反性 u（k，k）=1。

由两两一致性系数可得模糊关系矩阵：$R = [u(k,r)]_{m\times m}$。由上述性质可知 R 为相似矩阵，即具有对称性和自反性；但 R 不具有传递性，即 R 不具有等价关系，所以不能由 R 直接来进行分类。因而，对 R 进行多级复合运算，求出其传递闭包 $t(R)$。由文献[4]可知，经过多级复合后，$t(R)$具有等价性，可由$t(R)$对 m 位专家意见进行分类。当分类情况基本一致时，认为专家们给出的判断矩阵是公平公正的。

4　算例

设有5位专家对4个评价对象的单因素判断矩阵分别为：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1/4 & 1 & 5 & 3 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1/2 & 1 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 4 \\ 1/8 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1 & 5 & 3 \\ 1/4 & 1/5 & 1 & 5 \\ 1/8 & 1/3 & 1/8 & 1 \end{bmatrix},\quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 8 \\ 1/4 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1/3 & 1 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}。$$

对这5个矩阵进行一致性检验得：CR（A_1）=0.077，CR（A_2）=0.081，CR（A_3）=0.013，CR（A_4）=0.012，CR（A_5）=0.021，均通过一致性检验。相应的排序向

量分别为：

$$\boldsymbol{w}_1=(0.61,0.24,0.09,0.06)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_2=(0.48,0.32,0.15,0.05)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_3=(0.50,0.31,0.13,0.06)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_4=(0.62,0.20,0.12,0.06)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w}_5=(0.67,0.18,0.19,0.07)^{\mathrm{T}}。$$

用定义1来构造模糊相似矩阵$\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 0.988\,7 & 0.977\,1 & 0.989\,3 & 0.979\,5\\ 0.988\,7 & 1 & 0.987\,3 & 0.999\,2 & 0.988\,9\\ 0.977\,1 & 0.987\,3 & 1 & 0.986\,6 & 0.984\,2\\ 0.989\,3 & 0.999\,2 & 0.986\,6 & 1 & 0.988\,7\\ 0.979\,5 & 0.988\,9 & 0.984\,2 & 0.988\,7 & 1\end{bmatrix}。$$

同样根据文献[4]，对$\boldsymbol{R}$进行复合运算，$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{R}^2\circ\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}^4$，$\boldsymbol{R}^4\circ\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{R}^8$，其运算过程采用先取大后取小运算，此时有$\boldsymbol{R}^8=\boldsymbol{R}^4$，于是得传递闭包$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^4$，即$t(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^4=$

$$\begin{bmatrix}1 & 0.989\,3 & 0.987\,3 & 0.989\,3 & 0.988\,9\\ 0.989\,3 & 1 & 0.987\,3 & 0.998\,8 & 0.988\,9\\ 0.987\,3 & 0.987\,3 & 1 & 0.987\,3 & 0.987\,3\\ 0.989\,3 & 0.999\,2 & 0.987\,3 & 1 & 0.988\,9\\ 0.988\,9 & 0.988\,9 & 0.987\,3 & 0.988\,9 & 1\end{bmatrix}。$$

可以利用$t(\boldsymbol{R})$对专家组进行分类。

当$\lambda=0.999\,2$时，$\boldsymbol{R}_\lambda=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，由此可知，

分类1=｛专家2，专家4｝，分类2=｛专家1｝，
分类3=｛专家3｝，分类4=｛专家5｝。

当$\lambda=0.989\,3$时，$\boldsymbol{R}_\lambda=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，从而有

分类1=｛专家1，专家2，专家4｝，
分类2=｛专家3｝，分类3=｛专家5｝。

当$\lambda=0.988\,9$时，$\boldsymbol{R}_\lambda=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\end{bmatrix}$，从而有

分类1={专家1，专家2，专家4，专家5}，
分类2={专家3}。
当$\lambda=0.987\,3$时，5位专家在同一类。

5　结语

与文献[2]、[3]相比较，本文定义了新的专家一致性系数，从不同的角度描述一组数据的集中趋势，因此，该方法具有切实可行性。

参考文献：

[1] 王绪柱. 模糊关系积在群体决策中的应用[J]. 模糊系统与数学，1999，13(3)：39-44.
[2] 刘万里. 关于AHP中群体决策一致性的模糊逆判[J]. 宝鸡文理学院学报，2000，20(3)：168-170.
[3] 唐耀平. 关于AHP中群体决策的逆判问题[J]. 湖南科技学院学报，2006，27(5)：7-10.
[4] 谢季坚，刘承平. 模糊数学及其应用[M]. 2版. 武汉：华中科技大学出版社，2000.
[5] 何　斌. 确定AHP排序向量的一种新方法[J]. 蒙自师范高等专科学校学报，2001，3(4)：1-4.

（责任编辑：罗立宇）