$s\times t-s+1$阶Steiner三连系的构造方法

俞万禧，雷小磊

（安徽理工大学 土木建筑学院，安徽 淮南 232001）

摘 要： 在阐明$s\times t-s+1$阶Steiner三连系构造的基本思路的基础上，证明了关于$s\times t-s+1$阶Steiner三连系的存在和构造方面的相关定理，同时介绍和分析了19阶Steiner三连系构造的全过程，及$s\times t-s+1$阶Steiner三连系的计数问题。

关键词： 三连系；Steiner构造；$s\times t-s+1$阶

中图分类号： O157 **文献标识码：** A **文章编号：** 1673-9833(2008)01-0053-03

The Constructing Method of Steiner Triple Systems for Order $s\times t-s+1$

Chou Wanxi，Lei Xiaolei

（School of Civil Architecture， Anhui University of Science and Technology， Huainan Anhui 232001，China）

Abstract： In view of the basic concept of constructing Steiner triple systems, the concerning theorem of existence and construction for this systems of order $s\times t-s+1$ is proved. Then the entire procedure of constructing Steiner triple systems of order 19 and the enumeration problem of Steiner triple systems of order $s\times t-s+1$ are analyzed and introduced.

Key words： triple systems; Steiner construction; $s\times t-s+1$ order

1 基本思路

定义1 设顶集$V(G)=\{c_1, c_2, \cdots, c_v\}$，边集$E(G)=\{c_1c_2, c_1c_3, \cdots, c_{v-1}c_v\}$，$G$为完全图$K_v$，若将$|E(G)|=V(V-1)/2$个边排成三角阵，使得任意边$c_ic_j$与顶$c_i$和顶$c_j$关联，则所得的三角阵称为边矩阵，并记为$\boldsymbol{K}'_v$。

定义2 设顶集$V(G)=\{c_1, c_2, \cdots, c_v\}$，$V(G)$的3个子集$V_i=\{c_m, c_{m+1}, \cdots, c_{m+t-1}\}$，$V_j=\{c_p, c_{p+1}, \cdots, c_{p+t-1}\}$，$V_k=\{c_m, c_{m+1}, \cdots, c_{m+t-1}\}$，若$V_i$的每个顶与$V_j$的$t$个顶和$V_k$的$t$个顶相邻接，$V_j$的每个顶与$V_k$的$t$个顶相邻，则图$G$称为完全三分图，记为$K^{(i,j,k)}_{t,t,t}$。$K^{(i,j,k)}_{t,t,t}$的3个子图称为完全二分图，分别记为$K^{(i,j)}_{t,t}$，$K^{(i,k)}_{t,t}$，$K^{(j,k)}_{t,t}$，并有$K^{(i,j,k)}_{t,t,t}=K^{(i,j)}_{t,t}\cup K^{(i,k)}_{t,t}\cup K^{(j,k)}_{t,t}$。

倘若存在于完全三分图$K^{(i,j,k)}_{t,t,t}$中的$t\times t$个完全图K_3已被分离出，则所形成的$t\times t$三连系矩阵$\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}$可表述为：

$$\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}=\begin{bmatrix}\{m,p,q\} & \{m,p+1,q+1\} & \cdots & \{m,p+t-1,q+t-1\}\\ \{m+1,p+1,q\} & \{m+1,p+2,q+1\} & \cdots & \{m+1,p,q+t-1\}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \{m+t-1,p+t-1,q\} & \{m+t-1,p,q+1\} & \cdots & \{m+t-1,p+t-2,q+t-1\}\end{bmatrix}。$$

易见，仅将V_i，V_j，V_k中顶点的最小序号m，p，q代入矩阵$\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}$，即得$t\times t$个完全图$K_3$，但$\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}$不是唯一的，$\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}$的构造有$t$种选择。

定理1 设顶集$V(G)=\{c_1, c_2, \cdots, c_v\}$，$|V(G)|=v=s\times t-s+1$，$s$、$t$为已存在Steiner三连系的阶，则存在$v=s\times t-s+1$阶Steiner三连系，且$s\times t-s+1$

收稿日期：2007-10-10

作者简介：俞万禧（1930-），男（满族），辽宁大连人，安徽理工大学教授，主要从事岩石力学教学与科研工作.

阶 Steiner 三连系的构造等价于一个完全图 K_v 的 $v(v-1)/6$ 个完全图 K_3 的划分。

证明 设 $\boldsymbol{K}'_v$ 为 $v=s\times t-s+1$ 阶完全图 K_v 的边矩阵，则 $s\times t-s+1$ 阶 Steiner 三连系的构造归结为：1) $\boldsymbol{K}'_v$ 将划分出 s 个 t 阶完全图 $K_t^{(1)}$，$K_t^{(2)}$，$K_t^{(3)}$，…，$K_t^{(s)}$ 和 $s(s-1)/2$ 个完全二分图 $K_{t,t}^{(i,j)}$，$K_{t,t}^{(i,k)}$，$K_{t,t}^{(j,k)}$；2)将每个完全图 $K_t^{(i)}$ 划分成 $t(t-1)/6$ 个完全图 K_3，将 $s(s-1)$ 个完全二分图 $K_{t,t}^{(i,j)}$，$K_{t,t}^{(i,k)}$，$K_{t,t}^{(j,k)}$ 并成 $s(s-1)$ 个各由 $t'\times t'$ 个完全图 K_3 构成的三连系矩阵 $\boldsymbol{K}'^{(i,j,k)}_{t,t,t}$，从而得 $v(v-1)$ 个完全图 K_3。定理 1 得证（$t'=t-1$）。[1-3]

2 19 阶 Steiner 三连系

当 $s=3$，$t=7$，$v=s\times t-s+1=19$ 时，应将完全图 K_{19} 的边矩阵 $\boldsymbol{K}'_v$ 划分为 $t=3$ 个 7 阶完全图 $K_7^{(1)}$，$K_7^{(2)}$，$K_7^{(3)}$ 的边矩阵 $\boldsymbol{K}'^{(1)}_t$，$\boldsymbol{K}'^{(2)}_t$，$\boldsymbol{K}'^{(3)}_t$ 和 3 个完全二分图 $K_{6,6}^{(i,j)}$，$K_{6,6}^{(i,k)}$，$K_{6,6}^{(j,k)}$ 的边矩阵 $\boldsymbol{K}'^{(i,j)}_{6,6}$，$\boldsymbol{K}'^{(i,k)}_{6,6}$，$\boldsymbol{K}'^{(j,k)}_{6,6}$。

$$\boldsymbol{K}_7'^{(1)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1_2 & 1_3 & 1_4 & 1_5 & 1_6 & 1_7\\ & 2_3 & 2_4 & 2_5 & 2_6 & 2_7\\ & & 3_4 & 3_5 & 3_6 & 3_7\\ & & & 4_5 & 4_6 & 4_7\\ & & & & 5_6 & 5_7\\ & & & & & 6_7\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{K}_7'^{(2)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_8 & C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}7_8 & 7_9 & 7_{10} & 7_{11} & 7_{12} & 7_{13}\\ & 8_9 & 8_{10} & 8_{11} & 8_{12} & 8_{13}\\ & & 9_{10} & 9_{11} & 9_{12} & 9_{13}\\ & & & 10_{11} & 10_{12} & 10_{13}\\ & & & & 11_{12} & 11_{13}\\ & & & & & 12_{13}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_7\\ C_8\\ C_9\\ C_{10}\\ C_{11}\\ C_{12}\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{K}_7'^{(3)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}13_{14} & 13_{15} & 13_{16} & 13_{17} & 13_{18} & 13_{19}\\ & 14_{15} & 14_{16} & 14_{17} & 14_{18} & 14_{19}\\ & & 15_{16} & 15_{17} & 15_{18} & 15_{19}\\ & & & 16_{17} & 16_{18} & 16_{19}\\ & & & & 17_{18} & 17_{19}\\ & & & & & 18_{19}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_{13}\\ C_{14}\\ C_{15}\\ C_{16}\\ C_{17}\\ C_{18}\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(1,2)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_8 & C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1_8 & 1_9 & 1_{10} & 1_{11} & 1_{12} & 1_{13}\\ 2_8 & 2_9 & 2_{10} & 2_{11} & 2_{12} & 2_{13}\\ 3_8 & 3_9 & 3_{10} & 3_{11} & 3_{12} & 3_{13}\\ 4_8 & 4_9 & 4_{10} & 4_{11} & 4_{12} & 4_{13}\\ 5_8 & 5_9 & 5_{10} & 5_{11} & 5_{12} & 5_{13}\\ 6_8 & 6_9 & 6_{10} & 6_{11} & 6_{12} & 6_{13}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(1,3)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1_{14} & 1_{15} & 1_{16} & 1_{17} & 1_{17} & 1_{18}\\ & 2_{15} & 2_{16} & 2_{17} & 2_{18} & 2_{19}\\ & & 3_{16} & 3_{17} & 3_{18} & 3_{19}\\ & & & 4_{17} & 4_{18} & 4_{19}\\ & & & & 5_{18} & 5_{19}\\ & & & & & 6_{19}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\\ C_5\\ C_6\end{matrix},$$

$$\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(2,3)}=\begin{array}{c}\begin{matrix}C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19}\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}8_{14} & 8_{15} & 8_{16} & 8_{17} & 8_{18} & 8_{19}\\ 9_{14} & 9_{15} & 9_{16} & 9_{17} & 9_{18} & 9_{19}\\ 10_{14} & 10_{15} & 10_{16} & 10_{17} & 10_{18} & 10_{19}\\ 11_{14} & 11_{15} & 11_{16} & 11_{17} & 11_{18} & 11_{19}\\ 12_{14} & 12_{15} & 12_{16} & 12_{17} & 12_{18} & 12_{19}\\ 13_{14} & 13_{15} & 13_{16} & 13_{17} & 13_{18} & 13_{19}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\ C_8\\ C_9\\ C_{10}\\ C_{11}\\ C_{12}\\ C_{13}\end{matrix},$$

将 $\boldsymbol{K}'_7{}^{(1)}$，$\boldsymbol{K}'_7{}^{(2)}$，$\boldsymbol{K}'_7{}^{(3)}$ 各分解出 $s(s-1)/6=7$ 个完全图 K_3，得 3 个 7 阶 Steiner 三连系 $ST_1(7)$，$ST_2(7)$，$ST_3(7)$。

$ST_1(7)=\{\{1，2，3\},\{1，4，5\},\{1，6，7\},\{2，4，6\},\{2，5，7\},\{3，4，7\},\{3，5，6\}\}$；

$ST_2(7)=\{\{7，8，9\},\{7，10，11\},\{7，12，13\},\{8，10，12\},\{8，11，13\},\{9，10，13\},\{9，11，12\}\}$；

$ST_3(7)=\{\{7，14，15\},\{7，16，17\},\{7，18，19\},\{14，16，18\},\{14，17，19\},\{15，16，19\},\{15，17，18\}\}$。

将 $\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(1,2)}$，$\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(1,3)}$，$\boldsymbol{K}_{6,6}'^{(2,3)}$ 重叠成由 6×6 个完全图 K_3 构成的三连系矩阵 $\boldsymbol{K}_{6,6,6}'^{(1,2,3)}$。

$$\boldsymbol{K}_{6,6,6}'^{(1,2,3)}=\begin{bmatrix}\langle 1,8,14\rangle & \langle 1,9,15\rangle & \langle 1,10,16\rangle & \langle 1,11,17\rangle & \langle 1,12,18\rangle & \langle 1,13,19\rangle\\ \langle 2,9,14\rangle & \langle 2,10,15\rangle & \langle 2,11,16\rangle & \langle 2,12,17\rangle & \langle 2,13,18\rangle & \langle 2,8,19\rangle\\ \langle 3,10,14\rangle & \langle 3,11,15\rangle & \langle 3,12,16\rangle & \langle 3,13,17\rangle & \langle 3,8,18\rangle & \langle 3,9,19\rangle\\ \langle 4,11,14\rangle & \langle 4,12,15\rangle & \langle 4,13,16\rangle & \langle 4,8,17\rangle & \langle 4,9,18\rangle & \langle 4,10,19\rangle\\ \langle 5,12,14\rangle & \langle 5,13,15\rangle & \langle 5,98,16\rangle & \langle 5,9,17\rangle & \langle 5,10,18\rangle & \langle 5,11,18\rangle\\ \langle 6,13,14\rangle & \langle 6,8,15\rangle & \langle 6,9,16\rangle & \langle 6,10,17\rangle & \langle 6,11,18\rangle & \langle 6,12,19\rangle\end{bmatrix}。$$

求 3 个 7 阶 Steiner 三连系 $ST_1(7)$，$ST_2(7)$，$ST_3(7)$ 与三连系矩阵 $\boldsymbol{K}_{6,6,6}'^{(1,2,3)}$ 之并，得第 1 个 19 阶 Steiner 三连系 $ST_1(9)$。

倘若不断改变完全图 $K^{(i)}_7$ 的 $7(7-1)/6$ 个完全图 K_3 的划分方案和完全三分图 $K_{6,6,6}^{(i,j,k)}$ 的 6×6 个完全图 K_3 的划分方案，

并不断求 Steiner 三连系 $ST_1'(7)$ 与三连系矩阵 $\boldsymbol{K}_{6,6,6}^{\prime(1,2,3)}$ 之并，则分别得 $ST_1'(19)$，$ST_2'(19)$，$ST_3'(19)$，…，$ST_S'^{(7)}$。[4, 5]

$ST_1(19)$={{1，2，3}，{1，4，5}，{1，6，7}，{1，8，14}，{1，9，15}，{1，10，16}，{1，11，17}，{1，12，18}，{1，13，19}，{2，4，6}，{2，5，7}{2，9，14}，{2，10，15}，{2，11，16}，{2，12，17}，{2，13，18}，{2，8，19}；{3，4，7}，{3，5，6}，{3，10，14}，{3，12，16}，{3，13，17}，{3，8，18}，{3，9，19}，{4，11，14}，{4，12，15}，{4，13，16}，{4，8，17}，{4，9，18}，{4，10，19}，{5，12，14}，{5，13，15}，{5，8，16}，{5，9，17}，{5，10，18}，{5，11，19}；{6，13，14}，{6，8，15}，{6，9，16}，{6，10，17}，{6，11，18}，{6，12，19}；{7，8，9}，{7，10，11}，{7，12，13}，{7，14，15}，{7，16，17}，{7，18，19}；{8，10，12}，{8，11，13}；{9，10，13}，{9，11，12}；{14，16，18}，{14，17，19}；{15，16，19}，{15，17，18}}。

$ST_2(19)$={{1，2，4}，{1，3，6}，{1，5，7}，{1，8，15}，{1，9，16}，{1，10，17}，{1，11，18}，{1，12，19}，{1，13，14}；{2，3，7}，{2，5，6}，{2，9，15}，{2，10，16}，{2，11，17}，{2，12，18}，{2，13，19}，{2，8，14}；{3，4，5}，{3，6，7}，{3，10，15}，{3，11，16}，{3，12，17}，{3，13，18}，{3，8，19}；{3，9，14}，{4，11，15}，{4，12，16}，{4，13，17}，{4，8，18}，{4，9，19}，{4，10，14}，{5，12，15}，{5，13，16}，{5，8，17}，{5，9，18}，{5，10，19}，{5，11，14}，{6，13，15}，{6，8，16}，{6，9，17}，{6，10，18}，{6，11，19}，{6，12，14}；{7，8，10}，{7，9，12}，{7，11，13}，{7，14，16}，{7，15，18}，{7，17，19}；{8，9，13}，{8，11，12}；{9，10，11}，{9，12，13}；{14，15，19}，{14，17，18}；{15，16，17}，{15，18，19}}。

⋮　　　　⋮　　　　⋮

$ST_S(19)$={{1，2，7}，{1，3，5}，{1，4，6}，{1，8，18}，{1，9，19}，{1，10，14}，{1，11，15}，{1，12，16}，{1，13，17}；{2，3，6}，{2，4，5}{2，9，18}，{2，10，19}，{2，11，14}，{2，12，15}，{2，13，16}，{2，8，17}；{3，4，7}，{3，10，18}，{3，11，19}，{3，12，14}，{3，13，15}，{3，8，16}，{3，9，17}；{4，11，18}，{4，12，19}，{4，13，14}，{4，8，15}，{4，9，16}，{4，10，17}；{5，6，7}，{5，12，18}，{5，13，19}，{5，8，14}，{5，9，15}，{5，10，16}；{5，11，17}，{6，13，18}，{6，8，19}，{6，9，14}，{6，10，15}，{6，11，16}；{6，12，17}，{7，8，13}，{7，9，11}，{7，10，12}，{7，14，19}，{7，15，17}；{7，16，18}，{8，9，12}；{8，10，11}，{9，10，13}；{11，12，13}，{14，15，18}；{14，16，17}，{15，16，19}，{17，18，19}}。

3　19 阶 Steiner 三连系的计数

19 阶 Steiner 三连系的个数 N 取决于 19 阶完全图 K_{19} 的边矩阵 $\boldsymbol{K}_{19}'$ 的 9(9−1)/2 子矩阵的划分方案数 $N^{(1)}$，9 阶 Steiner 三连系的个数 $N^{(2)}$，任意完全三分图 $K_{2,2,2}^{(i,j,k)}$ 的 2 × 2 个完全图 K_3 的划分方案数 $N^{(3)}$。因 $N^{(1)}=v+1=20$，$N^{(3)}=2$，此外，根据作者的 105 个 9 阶 Steiner 三连系的构造结果和计数公式，均证明：$N^{(2)}=105$，故依据乘法原则，19 阶 Steiner 三连系的个数 $N=N^{(1)}\times N^{(2)}\times N^{(3)}=20\times 105\times 2$。

参考文献：

[1] 杨骅飞，王朝瑞. 组合数学及其应用[M]. 北京：北京理工大学出版社，1992.

[2] 杨振生. 组合数学及其算法[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2003.

[3] 俞万禧. $r\times t$ 阶 Kirlman 三连系构造的一种方法[J]. 数学的实践与认识，2004(9)：144-149.

[4] 俞万禧. 高阶 Steiner 三连系及其构造方法[J]. 安徽理工大学学报，2004 (3)：76-80.

[5] 雷小磊，俞万禧. 51 阶 Steiner 三连系的构造与计数[J]. 山东师范大学学报：自然科学版，2007，22(2)：53-54.

（责任编辑：罗立宇）