

# 关于地基沉降修正系数的贝叶斯方法优化

王永和, 李珍玉, 杨果林, 胡萍

(中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

**摘要:** 基于现场原位测试得到的实测沉降量与大量室内土工试验所得土性参数计算出的理论沉降量相比较, 并利用贝叶斯统计的基本原理, 推导出了沉降修正系数的概率分布模型和模型参数。分析结果表明, 提出的方法所得结果合理而可信, 可供类似工程参考应用。

**关键词:** 沉降; 修正系数; 小样本; 贝叶斯; 概率分布

中图分类号: TU433

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2008)01-0017-04

## Optimizing Method of Revised Coefficients for Foundation Settlement Calculation Based on Bayesian Theory

Wang Yonghe, Li Zhenyu, Yang Guolin, Hu Ping

(School of Civil Engineering and Architectural, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Based on the observed settlement datum by plate load test, the probability distribution models and model parameters via Bayesian statistics principle are induced when compared with a lot of calculation settlement. An example has been given to illustrating the present methods' rationality, which is good for extension application.

**Key words:** settlement; revised coefficients; small sample; Bayesian theory; probability distribution

岩土工程中常常遇到不能大量取样的情况, 由于土性参数的测试数据较少而无法运用传统的方法进行统计, 建立在过去信息和现在样本信息之上的贝叶斯统计, 对小样本系统的可靠性推理方法得到了广泛的认可。沉降修正系数是工程中计算地基沉降经常用到的经验系数之一, 使用过程中通常将其视为一定值。而由于土体本身的变异性、离散性和不确定性, 应用概率分布对沉降修正系数进行估计是较合理的方法。

由于地基土体本身和技术方面的问题, 使岩土参数的试验结果具有相当的离散性。而已有的岩土参数的概率分布及估值方法大多针对的是小样本数据。在系统误差确定的条件下, 抽样调查的准确性取决于抽样误差, 而抽样误差的大小与样本容量有直接关系, 即样本容量越大, 抽样误差就越小<sup>[1, 2]</sup>。当然, 这并不能说在抽样调查中样本容量越大就越好, 因为样本容量越大, 调查费用就越高。研究表明<sup>[3-5]</sup>, 贝叶斯方法可用于小样本试验分析, 在样本难于取得时特别有用,

它可发现数据间的因果关系, 适于处理不完整数据。

由于各种原因, 建筑地基设计规范推荐的方法<sup>[6]</sup>仍是岩土工程设计计算地基沉降时的主要方法, 然而, 它最大的缺点就是沉降修正系数的不确定性。由于试验方法的差异、土性指标的各向异性、试验条件与地基土实际状态间的差异、修正理论的不完善, 使得同一地层和区域的沉降修正系数不能完全依靠规范取得确定值, 而应该是根据土性指标变化的一种分布。本文基于以往对沉降修正系数的认识, 以此作为先验分布, 结合某铁路新线的现场载荷试验和大量的室内土工试验所得参数的概型为似然函数, 运用贝叶斯理论对概型参数进行优化。

## 1 贝叶斯原理

贝叶斯理论在统计过程中引入了先验分布和后验分布<sup>[7-9]</sup>。设总体  $X$  的概率密度函数为  $p(x|\theta)$ ,  $\theta$  是参数空间  $\Theta = \{\theta\}$  中的一个未知参数, 通过  $X$  的  $1$  组样本

收稿日期: 2007-11-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50678177), 国家自然科学基金资助项目(50778180)

作者简介: 王永和(1945-), 男, 安徽合肥人, 中南大学教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程地基变形及处理方面的研究。

观测值去推断  $\theta$  的分布。先验分布就是在获得观测值前,从已有的信息和经验知识中得到  $\theta$  在  $\Theta$  中的一个概率分布  $\pi(\theta)$ 。假定随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是总体  $X$  的一个样本,记为  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,若各随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  之间相互独立,则样本联合密度函数为:

$$p(x|\theta') = p(x_1|\theta') \cdot p(x_2|\theta') \cdots p(x_n|\theta'), \quad (1)$$

式中:  $\theta'$  是先验分布  $\pi(\theta)$  中的样本参数。

考虑先验分布  $\pi(\theta)$ , 则样本  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  和参数  $\theta$  的联合分布为:

$$h(x, \theta) = p(x|\theta)\pi(\theta). \quad (2)$$

根据 Bayes 定理, 当得到一组样本观测值  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  时,  $\theta$  的条件概率为:

$$\pi(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (3)$$

这就是贝叶斯公式的密度函数形式。这个在样本  $x$  给定下,  $\theta$  的条件分布即被称为  $\theta$  的后验分布。一般先验分布是反映人们抽样前对  $\theta$  的认识, 后验分布是反映人们抽样后对  $\theta$  的认识。它们之间的差异是由于样本出现后人们对  $\theta$  认识的一种调整。

## 2 参数的贝叶斯推断

### 2.1 沉降修正系数

地基土在荷载作用下产生沉降变形, 取原状土进行室内试验得土性参数, 如孔隙比、压缩模量等, 利用分层总和法或规范所推荐的方法, 计算理论沉降值  $S_j$ ; 现场试验实际所测的沉降值为  $S_c$ , 由于土的空间变异性, 不同试验点所测得的值可能不同, 是个随机变量。  $S_j$  与  $S_c$  可能存在偏差, 这归因于试验方法的不确定性和土参数的变异性。计算值与实测值之间的偏差是随机的, 它们之间的关系可以表示为:

$$S_j = \varphi S_c, \quad (4)$$

式中的  $\varphi$  是表示地基沉降计算值与实测值间的关系, 也可称为沉降修正系数。可通过大量的室内试验和现场实测资料统计得到。

目前认为现场载荷试验是工程中比较可靠的数据来源。设由现场载荷试验方法获得了  $n$  个测定值  $S_{c_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ); 同时, 这  $n$  个测定值对应于  $n$  个理论计算值  $S_{j_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则可以获得随机因子  $\varphi$  的  $n$  个值:

$$\varphi_i = \frac{S_{j_i}}{S_{c_i}}, \quad (i=1, \dots, n). \quad (5)$$

因为土的特殊性, 即使同一区域、同一地层、同一土样, 沉降修正系数也不一定是个确定值。实际上受各种客观和主观因素的影响, 土性参数总是波动的。因此, 较合理的做法就是用一概率分布来表示某一特定土性和

区域的沉降修正系数估计值。根据前人的研究<sup>[10]</sup>, 沉降修正系数  $\varphi$  虽然不确定, 但却是在某一区间内变化, 用  $\theta$  表示。假设参数  $\theta$  在某一区间内均匀分布。

### 2.2 贝叶斯推断

1) 将  $\theta$  看成是某区间上的随机变量, 于是当  $\theta$  已知时, 样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的联合分布密度  $p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  就被看成是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  对  $\theta$  的条件密度, 记为  $p(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$ , 简记为  $p(x|\theta)$ 。

2) 设法确定先验分布  $\pi(\theta)$ 。对于先验分布的获取, 目前有无信息先验分布 (Non-informative Priors) 和经验先验分布 (Informative Priors) 2 种。前者是在实际工作中, 对参数  $\theta$  没有任何过去的知识可以借鉴, 而是希望通过试验结果来获得。根据前人对沉降修正系数的研究, 只知道粘性土的参数  $\theta$  通常的取值范围为  $[a, b]$ , 其它没有任何以往的知识帮助我们确定先验分布  $\pi(\theta)$ 。文中按无经验先验分布 (Non-informative Priors), 假定参数  $\theta$  在其变化范围内, 取到各个值的机会是相同的, 采用均匀分布作为  $\pi(\theta)$ ,

$$\pi(\theta) \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < \theta < b, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad \text{记为 } \theta \sim U(a, b). \quad (6)$$

3) 利用条件分布密度  $p(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  和先验分布  $\pi(\theta)$ , 可以求出  $x_1, x_2, \dots, x_n$  与  $\theta$  的联合分布和样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的分布, 于是就可用它们求得  $\theta$  对  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的条件分布密度, 也就是用 Bayes 公式求得了后验分布密度  $f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta)p(x_1, \dots, x_n|\theta)}{\int \pi(\theta)p(x_1, \dots, x_n|\theta)d\theta}. \quad (7)$$

当样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  确定后,  $p(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$  中的  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是常数, 只有  $\theta$  在变化, 可以将其看成参数  $\theta$  的函数, 称为似然函数, 用  $l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$  来表示。于是后验分布密度也可写为:

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \pi(\theta)l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8)$$

由现场和室内土工试验所得沉降修正系数, 经计算数据服从正态分布, 即

$$p(x_1, \dots, x_n|\theta) \sim N(\bar{\theta}, \sigma). \quad (9)$$

式中:  $\bar{\theta}$  为观测样本的均值;  $\sigma$  为观测样本的方差。

由式 (9) 可得  $\theta$  似然函数  $l(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$  为:

$$l(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n N(\bar{\theta}_i, \sigma_i). \quad (10)$$

式中  $n$  为观测数据的个数。

综上所述, 后验分布  $f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$  可写成:

$$f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) \propto U(a, b) \cdot \prod_{i=1}^n N(\bar{\theta}_i, \sigma_i). \quad (11)$$

4) 利用后验分布密度  $f(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$  作出对  $\theta$  的推断。

### 3 实例

现场载荷试验得出的沉降变形固然较准确可靠, 但因为载荷试验的试验成本高、花费大, 而铁路或公路的线路较长, 在每段进行载荷试验不经济也没有必要。如何利用有限的小样本来推断沉降修正系数的概率分布问题, 是岩土随机参数概率分布研究中的基础问题, 具有重要的工程实际意义。

文中基于某铁路新线上 A、B、C、D 4 个工点的现场载荷试验实测沉降量 (如表 1 所示), 结合大量室内土工试验所得土性指标计算理论沉降量 (如表 2 所示), 对沉降修正系数进行贝叶斯统计分析。

表 1 载荷试验实测沉降值

Table 1 Settlements values by plate load tests mm

| 工点 | 载荷试验荷载量 /kPa |      |      |      |       |       |
|----|--------------|------|------|------|-------|-------|
|    | 40           | 80   | 120  | 160  | 200   | 240   |
| A  | 4.69         | 5.14 | 5.58 | 6.03 | 6.48  | 6.93  |
| B  | 1.78         | 2.56 | 3.34 | 4.13 | 4.91  | 5.70  |
| C  | 3.02         | 3.44 | 3.86 | 4.29 | 4.71  | 5.14  |
| D  | 0.83         | 2.44 | 4.60 | 7.20 | 10.21 | 13.57 |

表 2 室内试验沉降计算值

Table 2 Calculation values of settlement by laboratory mm

| 工点 | 路面荷载 /kPa |      |      |       |       |       |
|----|-----------|------|------|-------|-------|-------|
|    | 40        | 80   | 120  | 160   | 200   | 240   |
| A  | 1.03      | 4.66 | 7.34 | 10.03 | 12.71 | 7.90  |
| B  | 1.55      | 3.53 | 5.56 | 7.59  | 9.63  | 12.08 |
| C  | 2.84      | 3.24 | 5.11 | 6.97  | 8.84  | 22.10 |
| D  | 1.05      | 3.78 | 5.87 | 8.01  | 10.16 | 10.18 |

#### 3.1 先验分布

根据文献[11, 12], 关于沉降修正系数的取值范围一般为 0.2~1.4, 其先验分布为:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1.2}, & 0.2 < \theta < 1.4; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \quad (12)$$

#### 3.2 后验分布及参数估计

当样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  确定后, 条件分布概率服从正态分布,  $p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \sim N(\bar{\theta}_j, \sigma_j^2)$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \quad (13)$$

由式 (7)、(12)、(13) 可得, 沉降修正后验概率为:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{1.2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}}{\int \frac{1}{1.2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \quad (14)$$

由式 (14) 可知, 当先验概率假设为均匀分布, 样本概率为正态分布时, 由贝叶斯统计理论得其后验概率也服从正态分布。根据 4 个工点的现场载荷试验和室内土工试验, 根据样本统计数据得到不同荷载作用下的 6 组样本计算所得沉降修正系数可以看成贝叶斯统计的样本信息。  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 如表 3。

表 3 不同荷载量作用下沉降修正系数

Table 3 Revised coefficients for settlement with different load

| 工点 | 路面荷载 /kPa |      |      |      |      |      |
|----|-----------|------|------|------|------|------|
|    | 2.0       | 4.0  | 6.0  | 8.0  | 10.0 | 12.0 |
| A  | 0.22      | 0.91 | 1.32 | 1.66 | 1.96 | 1.14 |
| B  | 0.87      | 1.38 | 1.66 | 1.84 | 1.96 | 2.12 |
| C  | 0.94      | 0.94 | 1.32 | 1.62 | 1.88 | 4.30 |
| D  | 1.26      | 1.53 | 1.28 | 1.11 | 0.78 | 0.75 |

由试验数据计算得:

样本的均值为  $\bar{\theta}_j = (0.82, 1.19, 1.40, 1.56, 1.65, 2.08)$ , ( $j=1, 2, \dots, 6$ ), 记为  $\bar{\theta}_j = \mu_j$ ;

样本的方差为:  $\sigma_j = (0.38, 0.27, 0.15, 0.27, 0.50, 1.38)$ , ( $j=1, 2, \dots, 6$ )。

由以上综合分析得, 该区域粘性土的沉降修正系数的概率分布可用正态分布拟合, 其不同填土高度的概率分布密度为  $f(\theta | x) \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ , 如图 1~6 所示。

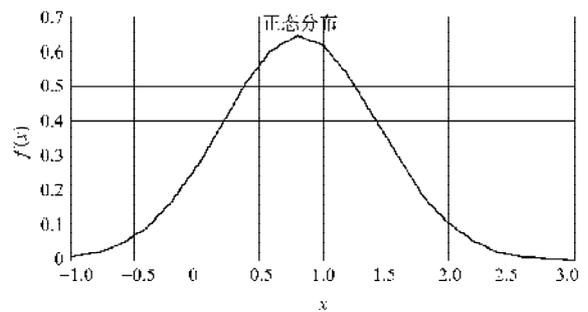


图 1 40 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 1 Revised coefficients for settlement curve of 40 kPa load

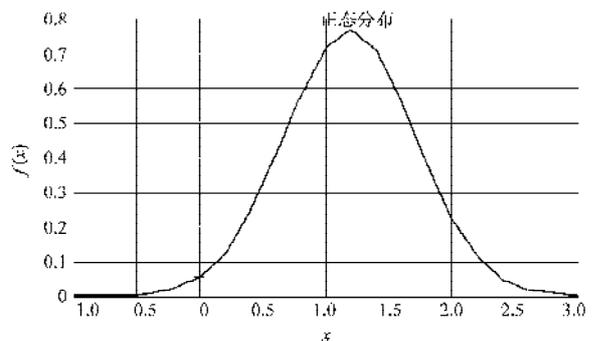


图 2 80 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 2 Revised coefficients for settlement curve of 80 kPa load

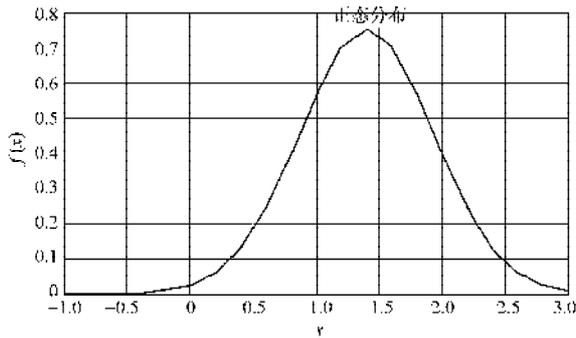


图3 120 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 3 Revised coefficients for settlement curve of 120 kPa load

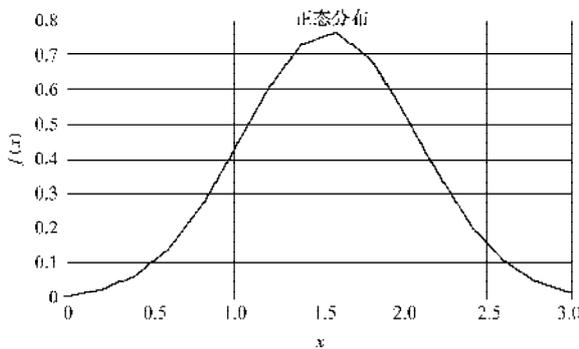


图4 160 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 4 Revised coefficients for settlement curve of 160 kPa load

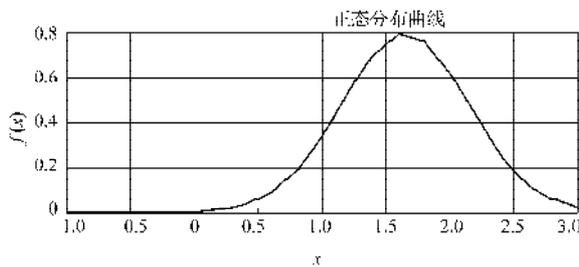


图5 200 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 5 Revised coefficients for settlement curve of 200 kPa load

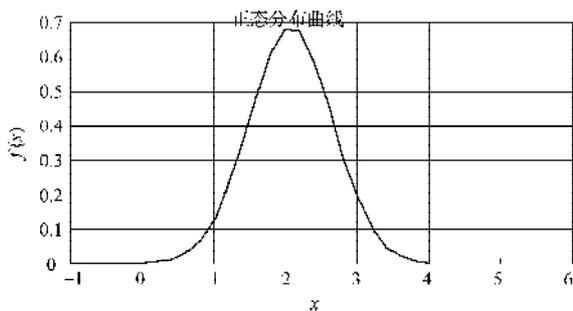


图6 240 kPa 荷载作用下沉降修正系数曲线

Figure 6 Revised coefficients for settlement curve of 240 kPa load

## 4 结论

1) 本文针对土的概率分布特点,对贝叶斯统计原理在沉降修正系数方面的运用进行了公式推导。应用经验分布作为贝叶斯的先验分布,在现场原位测试数据非常有限的条件下,利用小样本贝叶斯分析,求得了现场原位试验与室内土工试验对比的沉降修正系数的概率分布,用此分布来估计沉降修正系数。

2) 贝叶斯的后验分布是集中了总体、样本和先验等3种信息中有关 $\theta$ 的一切信息。最大限度地利用有限的样本信息,进而推求沉降修正系数的后验分布服从正态分布。

3) 该方法最大程度地利用了以往的经验信息,充分地反映了其客观性。这一方法与岩土参数统计的实际过程一致,具有较高的应用价值,同时也为类似工程地基的沉降计算提供了又一条分析途径。

## 参考文献:

- [1] 李小勇,谢康和,白晓红.土性指标概率分布模型的研究[J].岩土工程技术,1999(4):23-26.
- [2] 卫军,罗扣.基于贝叶斯方法的时变可靠度分析[J].华中科技大学学报,2007,35(2):1-4.
- [3] 宁宝宽,王维纲.浅基础可靠性设计中的贝叶斯统计方法及应用[J].沈阳工业大学学报,2005,27(1):103-107.
- [4] 孙旋,巫世晶,王晓筭.小样本系统可靠性评估模型的可信度验证[J].武汉大学学报,2006,39(2):88-92.
- [5] 陈斌,刘宁,卓家寿.岩土工程反分析的扩展贝叶斯法[J].岩石力学与工程学报,2004,23(4):555-560.
- [6] GB50007-2002,建筑地基基础设计规范[S].
- [7] 张尧庭,陈汉峰.贝叶斯统计推断[M].北京:中国科学出版社,1991:18-24.
- [8] Berger J. Statistical decision theory and Bayesian analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [9] 张仪萍.地基沉降泊松曲线拟合的概率方法[J].岩土工程学报,2005,27(7):837-841.
- [10] 茆诗松.贝叶斯统计[M].北京:中国统计出版社,1999.
- [11] 宁宝宽,杨军.沈阳粉质粘土工程指标的概率统计及分布模型[J].沈阳工业大学学报,2006,26(4):461-465.
- [12] 赵明华,杨明辉,刘煜,等.软土路基固结沉降机理及其预测方法研究[J].铁道科学与工程学报,2005,2(4):16-21.

(责任编辑:张亦静)