第21卷第6期
2007年11月
湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology
Vol.21 No.6
Nov. 2007

Lurie非线性系统时滞相关绝对稳定性分析

冯智勇，吴 敏，何 勇

（中南大学，湖南 长沙 410083）

摘 要：利用增广的Lyapunov泛函结合自由权矩阵方法，对非线性Lurie时滞系统的绝对稳定性问题进行了研究，得到了系统基于线性矩阵不等式（LMI）的具有更低保守性的时滞相关绝对稳定条件。数值实例表明，本方法所得结果优于已有文献中的结果。

关键词：Lurie时滞系统；绝对稳定；时滞相关；增广Lyapunov泛函；自由权矩阵

中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)06-0052-04

Research on Delay-Dependent Absolute Stability of Lurie Nonlinear Systems

Feng Zhiyong，Wu Min，He Yong

（Central South University，Changsha 410083，China）

Abstract：The problem of absolute stability of Lurie nonlinear systems with time-delay is investigated by using augmented Lyapunov functional combined with the free-weighting matrix approach. Some less conservative delay-dependent stability criteria are obtained and formulated in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Numerical example shows that the results obtained are better than the existing results.

Key words：Lurie systems with time-delay；absolute stability；delay-dependent；augmented Lyapunov functional；free-weighting matrix

0 引言

自Lurie系统及其绝对稳定性的概念提出以来[1]，Lurie系统的绝对稳定性研究已取得了许多成果[2-5]。由于时滞现象大量存在于实际系统中，常常是导致系统不稳定的一个重要原因，因而Lurie时滞系统的绝对稳定性研究得到了广泛的关注[6-9]。

Lurie时滞系统的绝对稳定条件可分为两大类：时滞相关条件和时滞无关条件。由于时滞相关条件考虑了系统的时滞信息，所以所得结果具有更低的保守性。时滞相关稳定性的研究成果大多为通过模型变换及交叉项界定技术得到的系统稳定性充分条件[10]。

近几年来，一种不采用模型变换及交叉项界定技术的自由权矩阵方法被提出，并对各类时滞系统进行了研究，得到了一系列具有更低保守性的时滞相关稳定条件[11,12]。这一方法也应用于非线性Lurie时滞系统的研究，取得了一定成果[8]。Han利用积分不等式方法得到了非线性Lurie时滞系统的时滞相关绝对稳定条件，得到了一些具有较低保守性的结果[9]。但文献[8]和[9]所采用的Lyapunov泛函为普通泛函，仍有改进的空间。

本文采用增广的Lyapunov泛函[13,14]结合自由权矩阵方法对一类非线性Lurie时滞系统进行了研究，但并未如文献[13，14]中那样将Lyapunov泛函作全面的增广，而是采用部分增广的Lyapunov泛函，减少了所用变量的个数，降低了所得定理中LMI的复杂性。所得时滞相关稳定条件较已有结果具有更低保守性，并将结果推广到具有时变结构不确定性的情形。数值实例

收稿日期：2007-08-24

基金项目：国家博士点专项科研基金资助项目（20050533015），国家杰出青年科学基金资助项目（60425310），国家自然科学基金资助项目（60574014）

作者简介：冯智勇（1981-），男，湖北天门人，中南大学信息科学与工程学院硕士生，主要研究方向为时滞系统鲁棒控制.

表明了本文方法的有效性和优越性。

1　问题描述

考虑如下非线性Lurie时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-h)+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-h),\\ w(t)=-\varphi(t,z(t)),\\ x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-h,0]。\end{cases}\tag{1}$$

式（1）中，$x(t)\in R^n$，$w(t)\in R^m$，$z(t)\in R^m$ 分别为系统的状态向量、输入向量和输出向量；$h>0$ 为系统时滞；$\phi(t)$为连续向量值初始函数；A，B，D，M, N 为具有合适维数的常数实矩阵；

$\varphi(t,z(t)):[0,\infty)\times R^m\to R^m$为对$t$连续的非线性函数，对$z(t)$ 满足李普希兹(Lipchitz)条件，$\varphi(t,0)=0$，且对$\forall t\geq 0$, $\forall z(t)\in R^m$满足以下扇形约束：

$$[\varphi(t,z(t))-K_1z(t)]^{\mathrm{T}}[\varphi(t,z(t))-K_2z(t)]\leq 0。\tag{2}$$

式（2）中，K_1，K_2 为具有合适维数的常数实矩阵，且 $K=K_2-K_1$ 为对称的正定矩阵。我们通常说这样的一个非线性函数$\varphi(t,z(t))$属于扇形区域$[K_1,K_2]$。

首先，我们引入以下绝对稳定性的定义。

定义1　如果对所有属于扇形区域$[K_1,K_2]$的非线性函数$\varphi(t,z(t))$，系统（1）是全局一致渐进稳定的，则称系统（1）在扇形区域$[K_1,K_2]$内绝对稳定。

本文不仅讨论标称系统（1）的稳定性，而且还考虑具有如下时变结构不确定性的系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))x(t-h)+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-h),\\ w(t)=-\varphi(t,z(t)),\\ x(t)=\phi(t),\forall t\in[-h,0]。\end{cases}\tag{3}$$

时变结构不确定性的形式如下：

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta B(t)\end{bmatrix}=LF(t)\begin{bmatrix}E_a & E_b\end{bmatrix},\tag{4}$$

式（4）中，L，E_a和E_b是具有合适维数的常数矩阵，而$F(t)$是具有Lesbesgue可测元的不确定矩阵，且满足：$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leq I\ \ \forall t$。（5）

为讨论系统的不确定性，将用到如下引理。

引理1[15]　给定具有适当维数的矩阵$Q=Q^{\mathrm{T}}$，H，E，则$Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0$。对任意满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leq I$的$F(t)$成立的充要条件是存在$\lambda>0$，使得$Q+\lambda^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\lambda E^{\mathrm{T}}E<0$。

2　主要结果

首先考虑非线性函数$\varphi(t,z(t))$属于扇形区域$[0,K]$的情形，即$\varphi(t,z(t))$满足

$$\varphi(t,z(t))^{\mathrm{T}}[\varphi(t,z(t))-Kz(t)]\leq 0。\tag{6}$$

有如下结论：

定理1　给定标量$h>0$，如果存在矩阵，$P_a=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix}>0$，$Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix}\geq 0$，$Z\geq 0$ 以及任意合适维数的矩阵$T_i(i=1,2)$和标量$\varepsilon>0$，使得如下LMI成立：

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & -hT_1 & A^{\mathrm{T}}S\\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & -hT_2 & B^{\mathrm{T}}S\\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 & D^{\mathrm{T}}S\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -hZ & 0\\ * & * & * & * & * & -S\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

则系统（1）在扇形区域$[0,K]$内绝对稳定。其中

$$\Phi_{11}=GA+A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}+Q_{11}+T_1+T_1^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi_{12}=GB+A^{\mathrm{T}}P_{12}-T_1+T_2^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi_{13}=GD-\varepsilon M^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}},\quad \Phi_{14}=P_{12},$$
$$\Phi_{22}=B^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{12}^{\mathrm{T}}B-Q_{11}-T_2-T_2^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi_{23}=P_{12}^{\mathrm{T}}D-\varepsilon N^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}},\quad \Phi_{24}=P_{22}-Q_{12},$$
$$\Phi_{33}=-2\varepsilon I,\quad \Phi_{44}=-Q_{22},$$
$$G=P_{11}+Q_{12},\quad S=Q_{22}+hZ。$$

证明　由牛顿—莱布尼茨公式，对于任意合适维数的矩阵$T_i(i=1,2)$，有

$$2[x^{\mathrm{T}}(t)T_1+x^{\mathrm{T}}(t-h)T_2]\times\\ [x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s]=0。\tag{8}$$

由式（1）和式（6），有

$$-2\varepsilon w^{\mathrm{T}}(t)w(t)-2\varepsilon w^{\mathrm{T}}(t)K\times\\ [Mx(t)+Nx(t-h)]\geq 0。\tag{9}$$

构造如下形式的Lyapunov泛函：

$$V(t,x_t)=\zeta_1^{\mathrm{T}}(t)P_a\zeta_1(t)+\int_{t-h}^{t}\zeta_2^{\mathrm{T}}(s)Q_a\zeta_2(s)\mathrm{d}s+\\ \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。$$

这里，$P_a=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix}>0$，$Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix}\geq 0$，$Z\geq 0$ 为待定矩阵，且$\zeta_1(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}$，$\zeta_2(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}$。计算

$V(t, x_t)$沿系统（1）的导数，并利用式（8）和式（9），对任意标量 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\dot V(t,x_t) &= 2\zeta_1^{\mathrm T}(t)P_a\dot\zeta_1(t)+\zeta_2^{\mathrm T}(t)Q_a\zeta_2(t)-\\ &\quad \zeta_2^{\mathrm T}(t-h)Q_a\zeta_2(t-h)+h\dot x^{\mathrm T}(t)Z\dot x(t)-\\ &\quad \int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z\dot x(s)\mathrm ds \le 2\zeta_1^{\mathrm T}(t)P_a\begin{bmatrix}\dot x(t)\\ \dot x(t-h)\end{bmatrix}+\\ &\quad \zeta_2^{\mathrm T}(t)Q_a\zeta_2(t)-\zeta_2^{\mathrm T}(t-h)Q_a\zeta_2(t-h)+\\ &\quad h\dot x^{\mathrm T}(t)Z\dot x(t)-\int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)Z\dot x(s)\mathrm ds+\\ &\quad 2[x^{\mathrm T}(t)T_1+x^{\mathrm T}(t-h)T_2]\times\\ &\quad \left[x(t)-x(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot x(s)\mathrm ds\right]-\\ &\quad 2\varepsilon w^{\mathrm T}(t)w(t)-2\varepsilon w^{\mathrm T}(t)K\times\\ &\quad [Mx(t)+Nx(t-h)]=\\ &\quad \frac1h\int_{t-h}^{t}\eta_1^{\mathrm T}(t,s)\Phi\eta_1(t,s)\mathrm ds。\end{aligned}\tag{10}$$

这里，

$$\eta_1(t,s)=[x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}(t-h)\quad w^{\mathrm T}(t)\quad \dot x^{\mathrm T}(t-h)\quad \dot x^{\mathrm T}(s)]^{\mathrm T},$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{11}+A^{\mathrm T}SA & \Phi_{12}+A^{\mathrm T}SB & \Phi_{13}+A^{\mathrm T}SD & \Phi_{14} & -hT\\ * & \Phi_{22}+B^{\mathrm T}SB & \Phi_{23}+B^{\mathrm T}SD & \Phi_{24} & -hT\\ * & * & \Phi_{33}+D^{\mathrm T}SD & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0\\ * & * & * & * & -hZ\end{bmatrix}。$$

由文献[16]中的Schur补知，$\Phi<0$ 等价于式（7），从而保证当$\|x\|\neq 0$时$\dot V(t,x_t)<0$。由 Lypaunov-Krasovskii 稳定性定理可知，对扇形区域$[0，K]$中的所有非线性函数 $\varphi(t, z(t))$，系统(1)是全局渐进稳定的。根据定义 1，定理得证。

对非线性函数在一般的扇形区域$[K_1，K_2]$中的情形，通过应用反馈环的变换[3]，可得系统（1）在扇形区域$[K_1，K_2]$内的绝对稳定性等价于系统

$$\begin{cases}\dot x(t)=(A-DK_1M)x(t)+(B-DK_1N)\times\\ \qquad x(t-h)+Dw(t);\\ z(t)=Mx(t)+Nx(t-h);\\ w(t)=-\varphi(t,z(t));\\ x(t)=\phi(t),\quad \forall t\in[-h,0]。\end{cases}\tag{11}$$

在扇形区域$[0,\ K_2-K_1]$内的绝对稳定性。因此，由定理 1 可得：

定理 2 给定标量 $h>0$，如果存在矩阵 $P_a=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix}>0$，$Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix}\ge 0$，$Z\ge 0$，以及任意合适维数的矩阵 $T_i(i=1,2)$和标量 $\varepsilon>0$，使得如下 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix}\hat\Phi_{11} & \hat\Phi_{12} & \hat\Phi_{13} & \Phi_{14} & -hT_1 & (A-DK_1M)^{\mathrm T}S\\ * & \hat\Phi_{22} & \hat\Phi_{23} & \Phi_{24} & -hT_2 & (B-DK_1N)^{\mathrm T}S\\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 & D^{\mathrm T}S\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -hZ & 0\\ * & * & * & * & * & -S\end{bmatrix}<0,\tag{12}$$

则系统（1）在扇形区域$[K_1，K_2]$内绝对稳定。其中：

$\hat\Phi_{11}=G(A-DK_1M)+(A-DK_1M)^{\mathrm T}G^{\mathrm T}+Q_{11}+T_1+T_1^{\mathrm T}$,

$\hat\Phi_{12}=G(B-DK_1N)+(A-DK_1M)^{\mathrm T}P_{12}-T_1+T_2^{\mathrm T}$,

$\hat\Phi_{13}=GD-\varepsilon M^{\mathrm T}(K_2-K_1)^{\mathrm T}$,

$\hat\Phi_{22}=(B-DK_1N)^{\mathrm T}P_{12}+P_{12}^{\mathrm T}(B-DK_1N)-Q_{11}-T_2-T_2^{\mathrm T}$,

$\hat\Phi_{23}=P_{12}^{\mathrm T}D-\varepsilon N^{\mathrm T}(K_2-K_1)^{\mathrm T}$，且$\Phi_{14},\Phi_{24},\Phi_{33},\Phi_{44}$定义于定理 1。

用$A+LF(t)E_a$和$B+LF(t)E_b$分别替换式（12）中的 A 和 B，并利用引理 1 及 Schur 补，可得如下定理。

定理 3 给定标量 $h>0$，如果存在矩阵 $P_a=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix}>0$，$Q_a=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix}\ge 0$，$Z\ge 0$，以及任意合适维数的矩阵 $T_i(i=1,2)$和标量 $\varepsilon>0, \lambda>0$ 使得如下 LMI 成立，

$$\begin{bmatrix}\hat\Phi_{11} & \hat\Phi_{12} & \hat\Phi_{13} & \Phi_{14} & -hT_1 & (A-DK_1M)^{\mathrm T}S & GL & \lambda E_a^{\mathrm T}\\ * & \hat\Phi_{22} & \hat\Phi_{23} & \Phi_{24} & -hT_2 & (B-DK_1N)^{\mathrm T}S & P_{12}^{\mathrm T}L & \lambda E_b^{\mathrm T}\\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0 & D^{\mathrm T}S & 0 & 0\\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -hZ & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -S & SL & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\lambda I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\lambda I\end{bmatrix}<0。\tag{13}$$

则具有结构不确定性（4）的系统（3）在扇形区域$[K_1，K_2]$内绝对稳定。

3 数值实例

例1 考虑具有如下参数的时变结构不确定性系统(3)的鲁棒稳定性：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}，D=\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\end{bmatrix}，N=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}，K_1=0.2，K_2=0.5，$$

$$L=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}\ (\alpha\ge 0),\quad E_a=E_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}。$$

利用定理3计算出保证系统（3）绝对稳定的最大允许时滞$h_{\max}$列于表1中。可看出定理3比文献[9]相关结论具有更低的保守性。

表1 保证系统（3）绝对稳定的最大允许时滞$h_{\max}$

Table 1 Maximum allowed time-delay bound of $h_{\max}$ for the absolute stability of system (3)

计算方法	α			
	0.00	0.05	0.10	0.15
Han[9]	2.485 9	2.239 6	2.024 3	1.836 3
定理3	2.504 9	2.264 7	2.053 2	1.866 6

4 结论

本文通过采用增广的Lyapunov泛函，结合自由权矩阵方法对一类非线性Lurie时滞系统的绝对稳定性问题进行了研究，得到了系统的时滞相关绝对稳定条件，并将结果推广到具有时变结构不确定性的情形。所得时滞相关稳定条件比已有结果具有更低的保守性，数值实例表明了本文方法的有效性和优越性。

参考文献：

[1] Lur'e A I，Postnikov V N. On the theory of stability of control systems[J]. Prikladnayay Matematika Mehkhanika，1944，8 (3)：246−248.

[2] Popov V M. Hyperstability of control systems[M]. New York：Springer，1973.

[3] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. Upper Saddle River，NJ：Prentice-Hall，1996.

[4] Yakubovich V A，Leonov G A，Gelig A Kh. Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities[M]. Singapore：World Scientific，2004.

[5] Yang C，Zhang Q，Zhou L. Generalised absolute stability analysis and synthesis for Lur'e-type descriptor systems [J]. IET Control Theory and Application，2007，1 (3)：617−623.

[6] Popov V M，Halanay A. About stability of nonlinear controlled systems with delay[J]. Automation Remote Control，1962，23 (7)：849−851.

[7] Gan Z X，Ge W G. Lyapunov functional for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities[J]. Journal of Mathematics Analysis and Applications，2001，259 (2)：596−608.

[8] He Y，Wu M. Absolute stability for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2003，159 (2)：241−248.

[9] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica，2005，41 (12)：2171−2176.

[10] Fridman E，Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control: Constant and time-varying delays[J]. Int. J. Control，2003，76 (1)：48−60.

[11] He Y，Wu M，She J H，Liu G P. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic type uncertainties[J]. IEEE Trans. Autom. Control，2004，49 (5)：828−832.

[12] Wu M，He Y，She J H，Liu G P. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica，2004，40 (8)：1435−1439.

[13] He Y，Wang Q G，Lin C，Wu M. Augmented Lyapunov functional and delay-dependent stability criteria for neutral systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2005，15 (8)：923−933.

[14] He Y，Wang Q G，Xie L H，Lin C. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay[J]. IEEE Trans. Autom. Control，2007，52 (2)：293−299.

[15] Petersen I R， Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. Automatica，1986，22(4)：39−41.

[16] Boyd S，Ghaoui L E，Feron E，et al. Linear matrix inequality in system and control theory[M]. Philadelphia：SIAM，1994.