

# 自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法 求解稳态热传导问题

李庆华, 陈莘莘, 欧阳琴, 欧蔓丽

(湖南工业大学, 湖南 株洲 412008)

**摘要:** 自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法采用自然邻近插值构造试函数, 并且在由 Delaunay 三角形构成的多边形局部子域上采用局部 Petrov-Galerkin 方法建立整体求解的平衡控制方程, 是一种真正的无网格法。该方法能够方便准确地施加本质边界条件, 而且得到的系统矩阵是带状稀疏矩阵。对该方法在稳态热传导问题中的应用进行了研究, 算例结果表明该方法具有良好的数值精度和稳定性。

**关键词:** 无网格法; 局部 Petrov-Galerkin 法; 自然邻近插值; 稳态热传导

**中图分类号:** TP301.6

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2007)06-0036-04

## On Meshless Natural Neighbour Petrov-Galerkin Method for Stable Heat Conduction Problem

Li Qinghua, Chen Shenshen, OuYang Qin, Ou Manli

(Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

**Abstract:** In meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method, the natural neighbour interpolation is used as trial function and a weak form over the local polygonal sub-domains constructed by Delaunay triangulation is used to obtain the discretized system of equilibrium equations. It is a new truly meshless method because no background cells are needed for domain integration. The natural neighbour interpolants are strictly linear between adjacent nodes on the boundary of the convex hull, which facilitates the imposition of essential boundary conditions with ease as it is in the conventional finite element method. The system stiffness matrix in the present method is banded and sparse. The present method for solving stable heat conduction problem is presented and the numerical results show that the present method is quite accurate and stable.

**Key words:** meshless method; local Petrov-Galerkin method; natural neighbour interpolation; stable heat conduction

## 0 引言

无网格法是近年来迅速发展起来的新型数值方法。目前无网格法的种类已十分繁多<sup>[1]</sup>, 其中无单元 Galerkin (EFG) 法和无网格 Petrov-Galerkin (MLPG) 是最常用的两种无网格方法<sup>[1-3]</sup>。但是由于在 EFG 法和 MLPG 法中均以移动最小二乘法 (Moving Least Square, 简记为 MLS) 为理论基础, 其试函数的构造十分复杂, 而且涉及到矩阵求逆和多个矩阵相乘, 计算时间长,

效率低。另外, MLS 形函数不满足 Kronecker 条件, 难以施加本质边界条件。而自然邻近插值 (natural neighbour interpolation) 作为一种具有插值特性的近似方案, 逐渐受到学者们<sup>[4-6]</sup>的重视。

自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法<sup>[5]</sup>采用自然邻近插值构造试函数, 并且采用三结点有限元形函数作为加权残值法的加权函数。同时这种方法在由 Delaunay 三角形构成的多边形局部子域上采用局部 Petrov-Galerkin 方法建立整体求解的平衡控制方程。由于自然邻近插

收稿日期: 2007-08-05

作者简介: 李庆华 (1976-), 女, 江西靖安人, 湖南工业大学讲师, 主要从事传热学的教学与研究。

值构造的试函数具有插值特性, 因此可以直接准确地引入本质边界条件。另外, 多边形局部子域上的积分可转化为构成该子域的 Delaunay 三角形区域上的积分之和, 而 Delaunay 三角形区域上的积分可采用高斯积分计算得到。本文对自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法的基本理论及其在稳态热传导问题中的应用进行了研究, 并且编制了相应的计算程序。算例结果表明, 该方法具有良好的数值精度和稳定性。

### 1 自然邻近插值

自然邻近插值是一种多变量的插值方案, 目前应用于无网格法的有 Sibson 插值<sup>[4,5]</sup>和 non-Sibsonian 插值<sup>[6]</sup>, 本文采用 Sibson 插值。

对一个任意几何形状的二维分析区域  $\Omega$ , 先在区域  $\Omega$  上按照一定的规则布置离散的点  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ 。Voronoi 图将区域  $\Omega$  划分为子域  $T_i$ , 而子域  $T_i$  为所有距离  $n_i$  比距离其他点  $n_j \in N (j \neq i)$  小的点的集合。此时子域  $T_i$  称为点  $n_i$  的 Voronoi 结构, 如图 1 中的虚线所示, 其数学表达式为:

$$T_i = \{x \in R^2 : d(x, x_i) < d(x, x_j) \forall j \neq i\} \tag{1}$$

式 (1) 中,  $d(x, x_i)$  是结点  $x$  与  $x_i$  的距离。

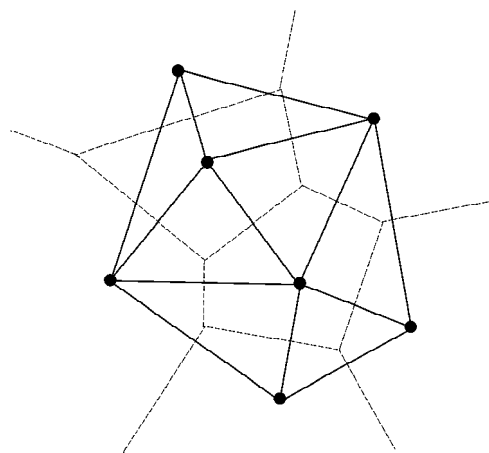


图 1 Voronoi 结构和 Delaunay 三角形

Fig. 1 Voronoi diagram and Delaunay triangulation

Delaunay 三角化作为 Voronoi 结构的对偶, 其重要特性是空圆准则, 即通过 Delaunay 三角形顶点的外接圆不会包含其它结点。该准则用来确定待求点的自然邻近结点, 如果待求点  $x$  在三角形的外接圆内, 那么该三角形的顶点就是  $x$  的自然邻近结点。

设点  $x$  周围结点的三角化网格及 Voronoi 结构如图 2 所示。在此基础上, 再进一步建立点  $x$  周围的二次 Voronoi 结构, 则点  $x$  的插值函数可表示为:

$$\phi_i(x) = A_i(x) / A(x), \tag{2}$$

式 (2) 中,  $A_i(x)$  为结点  $x_i$  与点  $x$  的 Voronoi 结构的重叠部分的面积;  $A(x)$  为点  $x$  的 Voronoi 结构的面积。例如结点 1 的插值函数可表示为:

$$\phi_1(x) = A_{acefb} / A_{abcd} \tag{3}$$

从方程(2)可以发现, 形函数  $\phi_i(x)$  满足单位分解的

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \quad x \in \Omega \tag{4}$$

同时还可以证明, 方程(2)的形函数  $\phi_i(x)$  与有限单元形函数一样满足式(5):

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_i(x) \leq 1, \\ \phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \end{cases} \quad x \in \Omega \tag{5}$$

这就意味着与其他无网格法的形函数不同, 用自然邻近插值可以准确地施加本质边界条件。有关自然邻近插值更详细的论述, 可参见文献[4,5]。

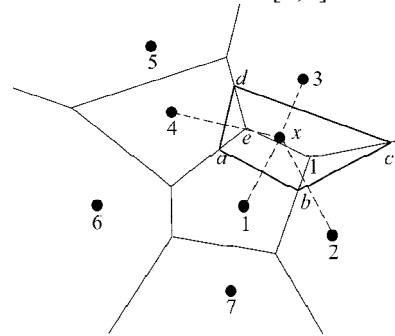


图 2 点 x 的一次和二次 Voronoi 结构

Fig. 2 First-order and Second-order Voronoi cells about x

### 2 稳态热传导问题的基本方程

平面结构受热与放热互相平衡时, 结构温度不再随时间而改变, 平面内温度只是坐标的函数  $T(x,y)$ 。由热传导理论, 在求解的平面区域  $\Omega$  内, 此温度函数  $T$  应满足的微分方程和边界条件为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + g = 0, \quad \text{in } \Omega; \tag{6}$$

$$T = \bar{T}, \quad \text{on } \Gamma_1; \tag{7}$$

$$-\left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) = \bar{q}, \quad \text{on } \Gamma_2; \tag{8}$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = h(T_a - T), \quad \text{on } \Gamma_3. \tag{9}$$

以上各式中:

- $k_x, k_y$  分别是材料沿  $x, y$  方向的热传导系数;
- $g$  为物体内的热生成率;
- $n_x, n_y$  是边界外法线的方向余弦;
- $\bar{q}$  为给定热流量;
- $h$  为放热系数;
- $T_a$  为周围介质温度。

分析区域  $\Omega$  可看作由共享结点  $i$  的 Delaunay 三角形构成的多边形子域  $\Omega_i$  构成, 在每个多边形子域  $\Omega_i$  上利用加权残值得得:

$$\int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + g \right] w d\Omega = 0 \quad (10)$$

式(10)中,  $w$  为加权函数。

对方程(10)的左边项进行分部积分并利用散度定理后, 可得:

$$\int_{\Omega_s} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - wg \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega_s} w \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0 \quad (11)$$

上式中的子区域  $\Omega_s$  的边界  $\Gamma_s$  通常由 4 部分组成: 内边界  $\Gamma_{s1}$ , 局部边界  $\partial\Omega_s$  位于整体边界上的温度边界部分  $\Gamma_{s1}$ 、热流边界部分  $\Gamma_{s2}$  和对流换热边界部分  $\Gamma_{s3}$ 。又考虑到边界条件式(8)和(9), 方程(11)可进一步改写为:

$$\int_{\Omega_s} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - wg \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{s1}} w \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{s1}} w \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{s2}} w q_b d\Gamma - \int_{\Gamma_{s3}} w h (T_a - T) d\Gamma = 0 \quad (12)$$

式(10)中,  $q_b = -\bar{q}$  ( $q_b > 0$ ) 表示流入边界的热流。当子域  $\Omega_s$  完全位于整体域  $\Omega$  中,  $\partial\Omega_s$  与区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  不相交, 方程(12)中的  $\Gamma_{s1}$ 、 $\Gamma_{s2}$  和  $\Gamma_{s3}$  的积分项为零。

为了简化方程(12), 在每个共享结点  $i$  的 Delaunay 三角形单元  $T_{ii}$  上选取结点  $i$  的三结点有限单元形函数  $N_i$  作为加权函数  $w$ , 即  $w = N_i$ 。很显然, 这样的加权函数  $N_i$  在内边界  $\Gamma_{s1}$  上的值为零。另外, 注意到方程(12)的  $\Gamma_{s1}$  积分项包括如图 3 所示的两种情况, 对于图 3 中的 a) 加权函数  $N_i$  在局部温度边界上恒等于零, 故整个积分项为零; 对于图 3 中的 b), 由于温度约束, 将该项组集到整体刚度矩阵时, 其对应的刚度矩阵项失效, 因此, 方程(12)可进一步简化为:

$$\sum_{I=1}^M \int_{T_{II}} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - wg \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{s2}} w q_b d\Gamma - \int_{\Gamma_{s3}} w h (T_a - T) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

式(13)中,  $M$  为组成结点  $i$  的子域  $\Omega_s$  的 Delaunay 三角形的总数。

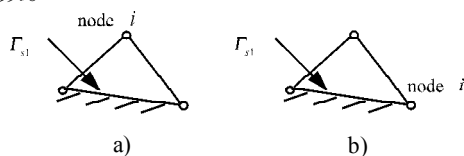


图 3 子域  $\Omega_s$  上的温度边界  $\Gamma_{s1}$

Fig. 3 Essential boundary condition  $\Gamma_{s1}$  over sub-domain  $\Omega_s$ , 采用自然邻近插值, 温度函数  $T(x)$  可以近似为

$$T(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) T_i, \quad (14)$$

式(14)中,  $n$  为计算点  $x$  周围的自然邻近结点的个数。将式(14)代入式(13), 并整理可得:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} T_j = F_i, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

其中: 
$$K_{ij} = \sum_{I=1}^M \int_{T_{II}} k_x \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega + \sum_{I=1}^M \int_{T_{II}} k_y \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma_{s3}} N_i h \phi_j(x) d\Gamma; \quad (16)$$

$$F_i = \int_{\Gamma_{s2}} N_i q_b d\Gamma + \int_{\Gamma_{s3}} N_i h T_a d\Gamma + \int_{\Omega_s} N_i g d\Omega \quad (17)$$

以上各式中,  $N$  为计算域内布置的离散结点总数。

### 3 数值算例

**算例 1** 计算如图 4 所示  $3 \times 1$  的平板上稳定状态下的温度分布。沿着  $x=0$  的边上给定恒定温度  $\bar{T}=0$ , 沿着  $y=0$  及  $y=1$  的边上给定热流量  $q_b=0$ , 沿着  $x=3$  的边上给定热流量  $q_b=1$ , 热生成率  $g=1$ , 热传导系数  $k_x=k_y=1$ 。用自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法计算时, 布置 315 ( $45 \times 7$ ) 个规则节点, 在构成子域的 Delaunay 三角形上采用 3 点高斯积分方案。计算结果见表 1, 由此可见本文数值解的精度是很高的。

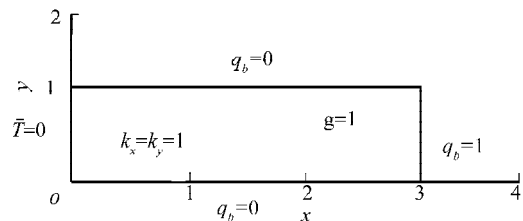


图 4 二维热传导问题模型

Fig. 4 Heat conduction model of two-dimension

表 1 本文结果与精确解的对比

Tab. 1 Comparison of present results with exact solutions

节点坐标		温度	
x	y	本文解	精确解 ( $T=4x-x^2/2$ )
1.0	0.25	3.47	3.50
1.0	0.75	3.47	3.50
2.0	0.25	5.94	6.00
2.0	0.75	5.94	6.00
3.0	0.25	7.40	7.50
3.0	0.75	7.40	7.50

**算例 2** 计算矩形域  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  在稳定状态下的温度分布。无内热源, 热传导系数  $k_x=k_y=1$ ,

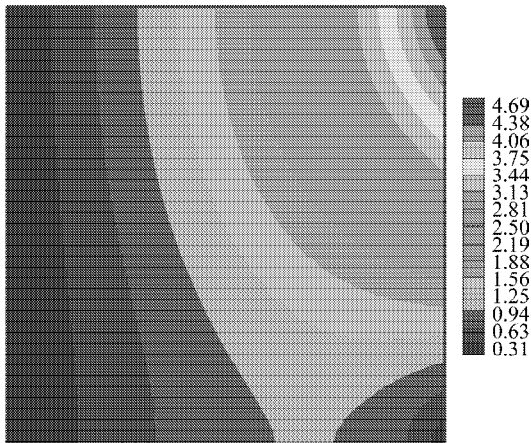
边界条件如式(18)所示

$$T|_{x=0}=0, T|_{x=a}=Ay, q_b|_{y=0,y=b}=0, \quad (18)$$

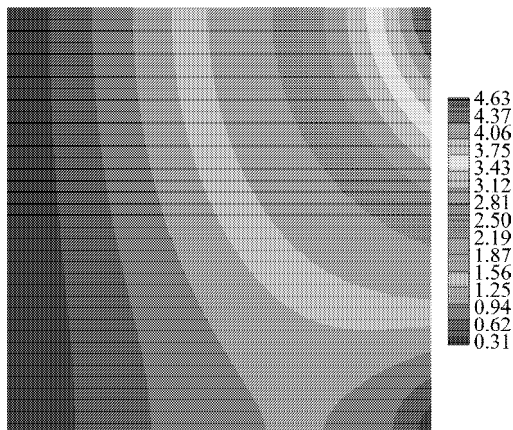
这个问题的精确解<sup>[7]</sup>是

$$T = \frac{Abx}{2a} + \frac{2Ab}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}。$$

在此算例中, 取  $a=b=1, A=5$ , 计算域内规则布置 1 225 ( $35 \times 35$ ) 个结点, 在构成子域的 Delaunay 三角形上采用 3 点高斯积分方案。图 5 给出了本算例的温度分布图, 由此可见本文数值解和解析解吻合得很好。



a) 数值解



b) 解析数

图 5 温度分布图

Fig. 5 Tempture distributions

## 4 结论

自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法是一种简单实用, 且计算效率和精度均十分优良的数值方法。虽然该方法需依托于分析区域的 Delaunay 三角化网格, 但它用无网格法的思想在全域构造试函数, 且其三角化网格过程由程序采用成熟的 Delaunay 算法全自动完成, 是一种真正的无网格法。自然邻近插值构造的试函数具有插值特性, 可以直接准确地施加边界条件, 而且整体刚度矩阵中的所有项均可以通过循环所有子域直接求得, 完全不需要装配过程。本文对自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法的基本理论及其在稳态热传导问题中的应用进行了研究, 推导了相应的计算公式, 并编制了程序, 算例结果表明该方法具有良好的数值精度和稳定性。

### 参考文献:

- [1] 曹国金, 姜弘道. 无单元法研究和应用现状及动态[J]. 力学进展, 2002, 32(4): 526-534.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y. Element free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.
- [3] Atluri S N, Zhu T L. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics[J]. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 117-127.
- [4] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The nature element method in solid mechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43: 839-887.
- [5] 蔡永昌, 朱合华, 王建华. 基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报, 2003, 35(2): 187-193.
- [6] 王凯, 周慎杰, 单国骏. 基于局部 Petrov-Galerkin 离散方案的无网格法[J]. 计算力学学报, 2006, 23(5): 518-523.
- [7] 郭玉翠. 数学物理方法[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003.