第21卷第6期
2007年11月

湖南工业大学学报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.21 No.6
Nov. 2007

点度，围长与图的上可嵌入性

张启明[1]，黄元秋[2]

（1. 湖南工业大学 数学系，湖南 株洲 412007；2. 湖南师范大学 数学系，湖南 长沙 410081）

摘　要：结合连通度、点度及围长等条件，给出了两类新的上可嵌入图，且前者条件中的界是不可达的，而后者条件中的界是最好的。

关键词：图；Betti亏数；上可嵌入性；点度；围长

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)06-0026-05

Vertice Degree，Girth and Upper Embeddability in Graphs

Zhang Qiming [1]，Huang Yuanqiu [2]

（1. Department of Mathematics，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Department of Mathematics，Hunan Normal University，Changsha 410081，China）

Abstract: Combining with connected degree ,vertice degree and girth, two classes of new and upper embeddable graphs are put forward. However, the boundary of the former conditions does impossibly reach and the latter is the best one.

Key words: graph；Betti deficiency；upper embeddability；vertice degree；girth

1　背景知识

本文所考虑的图 $G=(V, E)$ 均指有限无向简单连通图。设 S 为一个定向曲面，一个图 G 在 S 上的一个2-胞腔嵌入是指 G 能画在 S 上使得边与边之间除顶点外不再相交，且在 S 上去掉 G 的顶点与边之后的每个连通分支与圆盘同胚。图 G 的最大亏格[1]记为 $r_M(G)$，是指最大的整数 k 使得 G 能2-胞腔嵌入亏格为 k 的定向曲面 S 上。因为图在任意定向曲面的2-胞腔嵌入中至少有一个面，由Euler公式易得出图 G 的最大亏格满足 $r_M(G)\le\left\lfloor\frac{\beta(G)}{2}\right\rfloor$，其中 $\beta(G)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 称为图 G 的圈秩（对任意实数 x，$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数）。同时，若 $r_M(G)=\left\lfloor\frac{\beta(G)}{2}\right\rfloor$，则图 G 是上可嵌入的。

图的最大亏格是刻划图在曲面上嵌入的一个拓扑参数，与最大亏格相关的上可嵌入问题，即一个图的最大亏格的最好上界是拓扑图论中一直感兴趣的问题。给定一些限制条件，如图的连通度、直径、围长、顶点度、最小度、割点数、独立数、2-因子等参数与图的上可嵌入性之间的关系，许多文献都证明了一些图类是上可嵌入的，感兴趣的读者请参阅文献[1-16]。文献[17]中证明：设 G 是2-点连通图，若对任意一对 $d(u,v)=2$ 的点 u,v，有 $\max\{d(u),d(v)\}\ge\frac{n}{2}$，其中 $n=|V(G)|$，则 G 是上可嵌入的。

本文考虑图的上可嵌入性与连通度，点度以及围长的关系，利用非上可嵌入图的一个结构特征（即文献[18]），对文献[17]中定理的条件进行改进和推广，得到了如下定理，即本文的主要结果。

定理1　设 G 是2-连通简单图，且不含 K_3，若对任意一对距离为2的点 u,v，有 $\max\{d(u),d(v)\}>\frac{n}{3}-(g-3)$，其中 $n=|V(G)|$，则 G 是上可嵌入的，且条件中不等式的界“$\frac{n}{3}-(g-3)$”是不可达的。

收稿日期：2007-09-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771062）
作者简介：张启明（1974-），女，湖南涟源人，湖南工业大学讲师，硕士，主要研究方向为图论及其应用；
黄元秋（1966-），男，湖南常德人，湖南师范大学教授，博士生导师，主要研究方向为图论及其应用.

定理2　设G是3−连通简单图，若对任意依次相邻的3点u,v,w，有$\max(d(u),d(v),d(w))\geq \frac{n}{6}-(g-4)$，其中$n=|V(G)|$，则$G$是上可嵌入的，且条件中不等式的界"$\frac{n}{6}-(g-4)$"是最好的。

2　有关术语和引理

下面解释文中的有关概念和记号，其中未加说明的均同文献[19]。对任意集合X，$|X|$表示X的基数。设：Y为图G的任意边集，G/Y表示从G中去掉Y中的所有边所得到的图。若T为图G的一棵生成树，记号$\xi(G,T)$表示所有$G/E(T)$中边数为奇数的连通分支数。称$\xi(G)=\min_T(\xi(G,T))$为G的Betti亏数，其中min取遍G的所有生成树T。设$A\subseteq E(G)$为图G的边子集，记号$c(G/A)$及$b(G/A)$分别表示G/A的所有连通分支数及其G/A的具有Betti数为奇数的所有连通分支数。设$F_1,F_2,\cdots,F_l$为图G的l个不相交的连通子图，记号$E(F_1,F_2,\cdots,F_l)$表示G中2个端点分别在2个不同的F_i和$F_j(1\leq i\neq j\leq l)$中的边集；另外，对G的任意子图F，记号$E(F,G)$表示G中一个端点属于F，而另一个端点不属于F的边组成的集合；$C(G/A)$表示G/A的所有连通分支组成的集合；$C_i(G/A)$表示G/A中所有满足$|E(F_i,G)|=i$的连通分支组成的集合；一个顶点$v\in V(F)$，若它为$E(F,G)$中i条边的端点，则称之为F的一个i−触点；对图G的任意点集X，X关于G的点导出子图，记为$G[X]$，是以X为顶点集，以两个端点均在X中的边为边集的G的子图。若点u与点v相邻，点v与点w相邻，则称u,v,w3点依次相邻。围长是指图G中最短圈的长度，记作g。

关于图的上可嵌入性，文献[20，21]给出了G是上可嵌入的充要条件及其最大亏格由$\beta(G)$和$\xi(G)$所表达的一个公式。

引理1[20，21]　设G为图，则

1) $r_M(G)=\dfrac{\beta(G)-\xi(G)}{2}$；

2) G是上可嵌入的，当且仅当$\xi(G)\leq 1$。

由引理1知，对一个图G的最大亏格的研究可转化为对参数$\xi(G)$的研究，关于$\xi(G)$，文献[22]给出了如下组合表达式：

引理2[22]　设G为图，则

$$\xi(G)=\max_{A\subseteq E(G)}\{c(G/A)+b(G/A)-|A|-1\}。$$

文献[18]从反面给出了非上可嵌入图所具有的结构特征。

引理3[18]　设G为图，若G不是上可嵌入的，即$\xi(G)\geq 2$，则存在$A\subseteq E(G)$满足如下性质：

1) $c(G/A)=b(G/A)\geq 2$，且对G/A的任意连通分支F，都有$\beta(F)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$；

2) 对于G/A的任意连通分支F，F是G的点导出子图；

3) 对于G/A的l个不同连通分支$F_1,F_2\cdots,F_l(l\geq 2)$，有$E(F_1,F_2\cdots,F_l)\leq 2l-3$，特别的，当$l=2$时，$E(F_1,F_2)\leq 1$；

4) $\xi(G)=2c(G/A)-|A|-1$。

引理4　在引理3的条件和结论下有：

1)对G/A的任意连通分支H，若G是k−边连通的$(k\geq 1)$，则$|E(H,G)|\geq k$；

2) $|A|=\dfrac{1}{2}\sum_H|E(H,G)|$，这里$\Sigma$是取遍$G/A$的所有连通分支$H$求和；

3)若G为2−边连通的，则$c(G/A)\geq |C_2(G/A)\cup C_3(G/A)|\geq 3$；

4)若G为3−边连通的，则$c(G/A)\geq |C_3(G/A)|\geq 6$。

证明　1) 假设结论不成立，则G中必有边数小于k的边割集，这与G是k−边连通图矛盾。

2)我们构造一个图G^*如下：G^*的所有点对应于G/A的所有连通分支，G^*中任意两点x_1和x_2连一条边当且仅当，根据引理3的3)，x_1和x_2所对应的G/A的两个连通分支H_1和H_2有$|E(H_1,H_2)|=1$。显然，由G^*的构造及引理3的3)，易知$E(G^*)=A$。

因此，

$$|A|=|E(G^*)|=\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G^*)}d_{G^*}(x)=\frac{1}{2}\sum_H|E(H,G)|。$$

3)若G为2−边连通的，则对任意的$F\in G/A$都有$|E(F,G)|\geq 2$，记x和y分别为$|E(F,G)|=2$和3的F的数目，即$x=|C_2(G/A)|=2$，$y=|C_3(G/A)|=3$，从而有

$$|A|=\frac{1}{2}\sum_{F\in c(G/A)}|E(F,G)|\geq x+\frac{3}{2}y+2(c(G/A)-x-y),$$

由引理3的4)得：

$$3\leq 2c(G/A)-x-\frac{3}{2}y-2(c(G/A)-x-y)。$$

$$即3\leq x+\frac{1}{2}y，从而x+y\geq x+\frac{1}{2}y\geq 3。$$

所以$c(G/A)=b(G/A)\geq c(G/A)\geq |C_2(G/A)\cup C_3(G/A)|\geq 3$。

4)若G为3−边连通的，则对任意$F\in c(G/A)$，都有$|E(F,G)|\geq 3$，记x为$|E(F,G)|=3$的分支F的数目，即$x=|C_3(G/A)|=3$，接下来用引理4的3)的方法可证得$c(G/A)=b(G/A)\geq |C_3(G/A)|=x\geq 6$。

3 定理的证明

3.1 定理1的证明

用反证法。假设G不是上可嵌入的，则由引理3，存在$A\subseteq E(G)$使得性质1)~4)成立。设$F_1,F_2,\cdots,F_l$是G/A的连通分支，其中$l=b(G/A)$，由引理4的3)知$l\geq 3$。由引理3的1知，对G/A的任意连通分支F，都有$\beta(F)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，从而每一个分支$F_i$中至少存在一个圈$C_i$，又$G$为简单图，且不含$K_3$，因此$F_i$中也不含$K_3$，从而$|V(C_i)|\geq 4$。对$G$中所有距离为2的点对，必有存在于$C_i$中的点（不妨设为$u_i,v_i$），记$\max\{d(u_i),d(v_i)\}=d(u_i)$。

下面分$l=3$和$l\geq 4$两种情形加以讨论。

情形1 当$l=3$时，由以上分析知，在$F_i(i=1,2,3)$中至少存在一个点$u_i(i=1,2,3)$。因为G是2-连通图，所以G的3个连通分支各分别含两个1-触点，又F_i中不含K_3，因此，

$$d(u_i)\leq(|V(F_i)|-2)+1,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{3}d(u_i)\leq\sum_{i=1}^{3}\left|\left[V(F_i)-(g-2)+1\right]\right|=n-3g+9。$$

另外，由定理1中的条件，有：

$$d(u_i)>\frac{n}{3}-(g-3),$$

从而有：

$$\sum_{i=1}^{3}d(u_i)>\left(\frac{n}{3}-(g-3)\right)\times 3=n-3g+9。$$

这样，则必有$n-3g+9<n-3g+9$，矛盾。

情形2 当$l\geq 4$时，因为G是2-连通图，设$F_1,F_2,\cdots F_k,F_{k+1},\cdots,F_l$为$G/A$的$l$个连通分支。设有$k$个分支中分别含有两个触点，剩下的$l-k$个分支中各至少含3个触点，又$F_i$中不含$K_3$，因此，在上述$k$个分支中，

$$d(u_i)\leq|E(F_i,G)|-1+\left[|V(F_i)|-(g-2)\right],$$

而在剩下的$l-k$个分支中，

$$d(u_i)\leq|E(F_i,G)|-2+\left[|V(F_i)|-(g-2)\right]。$$

所以有如下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{l}d(u_i)\leq\sum_{i=1}^{k}d(u_i)+\sum_{i=k+1}^{l}d(u_i)\leq$$
$$\sum_{i=1}^{k}\left(|E(F_i,G)|+|V(F_i)|-g+1\right)+$$
$$\sum_{i=k+1}^{l}\left(|E(F_i,G)|+|V(F_i)|-g\right)=$$
$$n+2|A|+k-lg\leq n+2(2l-3)+$$
$$k-lg=n+k-6+(4-g)l。$$

另外，由定理1的条件有：

$$d(u_i)>\frac{n}{3}-(g-3),$$

所以有如下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{l}d(u_i)>\left[\frac{n}{3}-(g-3)\right]\times l。$$

综上得：

$$\left[\frac{n}{3}-(g-3)\right]\times l<n+k-6+(4-g)l。$$

整理得：

$$n(l-3)<3k+l-6。$$

从而

$$n<\frac{l+3k-6}{l-3}\leq\frac{4l-6}{l-3}=4+\frac{6}{l-3}\leq 10。$$

这和$n\geq 16$矛盾。综上可知，G是上可嵌入的。

下面我们讨论定理1中不等式的界“$\frac{n}{3}-(g-3)$”是不可达的，否则，有如下反例G_1（见图1）。设g_n表示围长为n，取G_1中边子集$A=\{e_1,e_2,e_3\}$。G/A有3个相同的分支，记为$F_i(i=1,2,3)$。一方面，对F_1中任意两个距离为2的点u,v，$\max\{d(u),d(v)\}$只可能为u_1或$u_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}$，同理在$F_2$中只可能为$v_1$或$v_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}$，在$F_3$中只可能为$w_1$或$w_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}$。这时，

$$d(u_1)=d\left(u_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}\right)=d(v_1)=d\left(v_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}\right)=d(w_1)=$$
$$d\left(w_{\lfloor\frac{g_n}{2}\rfloor+1}\right)=\frac{n}{3}-g_n-3=3。$$

另一方面，由于每个分支的Betti数为奇数，即$b(G_1/A)=c(C_1/A)=3$。由引理2知$\xi(G_1)\geq 2$，从而G_1不是上可嵌入的。这说明定理1中不等式的界是不可达的。

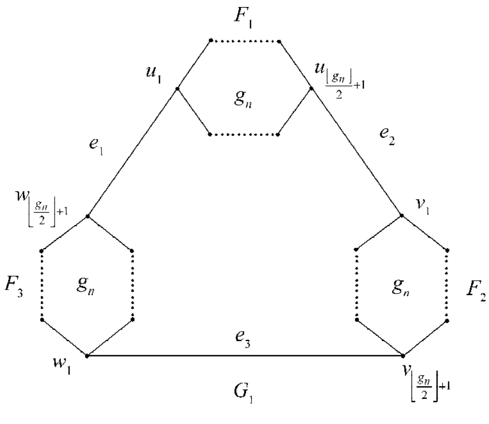


图1 非上可嵌入2-连通图举例（g_n=4，5或6）

Fig.1 For example unupper embeddable 2-connected graph（g_n=4，5或6）

3.2　定理 2 的证明

用反证法。假设 G 不是上可嵌入的，则由引理 3 知，存在 $A \subseteq E(G)$ 使得引理 3 中的性质 1）～ 4)成立。设 $F_1,F_2,\cdots,F_l$ 是 G/A 的连通分支，其中 $l=b(G/A)$，由引理 4 的 4)知 $l \geq 6$。又由引理 3 的 1)知，对 G/A 的任意连通分支 F，都有 $\beta(F) \equiv 1(\mathrm{mod}2)$，从而每一个分支 F_i 中至少存在一个圈 C_i，又 G 为简单图，所以 $|V(F_i)| \geq 3$，也必有 $|V(C_i)| \geq 3$。由定理 2 中的条件知，对 G 中任意 3 个依次相邻的点 u,v,w，都有 $\max\{d(u),d(v),d(w)\} \geq \frac{n}{6}+1$，则至少有这样的 3 个点存在于每个 F_i 中（不妨设为 u_i,v_i,w_i），记

$$\max\{d(u_i),d(v_i),d(w_i)\}=d(u_i),$$

则有 $d(u_i) \geq \frac{n}{6}-(g-4)$。

从而 $\sum_{i=1}^{l} d(u_i) \geq \left(\frac{n}{6}-(g-4)\right)l$。

下面分 $l=6$ 和 $l \geq 7$ 两种情形加以讨论。

情形 1　当 $l=6$ 时，必有

$$|E(F_i,G)|=3, \quad (i=1,2,\cdots,6),$$

从而

$$\sum_{i=1}^{6} d(u_i) \geq \left(\frac{n}{6}-(g-4)\right) \times 6 = n-6g+24。$$

另外，一方面因为 G 为 3- 连通图，所以每个分支的触点数不少于 3 个；另一方面，由于 $|E(F_i,G)|=3(i=1,2,\cdots,6)$，所以每个分支中最多有 3 个 1- 触点，从而每个分支中恰有 3 个 1- 触点，则

$$d(u_i) \leq |V(F_i)|-(g-2)-1,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{6} d(u_i) \leq \sum_{i=1}^{6}\left(|V(F_i)|-g+3\right) = n-6g+18。$$

于是 $n-6g+24 \leq n-6g+18$，矛盾。

情形 2　当 $l \geq 7$ 时，因为 G 是 3- 连通图，设 $F_1,F_2,\cdots,F_k,F_{k+1},\cdots,F_l$ 为 G/A 的 l 个连通分支。设有 k 个分支中分别含有 3 个触点，剩下的（$l-k$）个分支中各至少含 4 个触点。在上述 k 个分支中，

$$d(u_i) \leq |E(F_i,G)|-2+\left[|V(F_i)|-(g-3)\right],$$

而在剩下的（$l-k$）个分支中，

$$d(u_i) \leq |E(F_i,G)|-3+\left[|V(F_i)|-(g-3)\right]。$$

类似于定理 1 中的情形 2，可得：

$$\sum_{i=1}^{l} d(u_i) \leq \sum_{i=1}^{k} d(u_i) + \sum_{i=k+1}^{l} d(u_i) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(|E(F_i,G)|-2+|V(F_i)|-(g-3)\right)+$$

$$\sum_{i=k+1}^{l}\left(|E(F_i,G)|-3+|V(F_i)|-(g-3)\right)=$$

$$n+2|A|-lg+k \leq n+2(2l-3)+k-lg \leq$$

$$n+5l-6-lg。$$

另外，由定理 2 的条件有：

$$d(u_i) \geq \frac{n}{6}-(g-4),$$

所以有如下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{l} d(u_i) \geq \left(\frac{n}{6}-(g-4)\right) \times l。$$

综上得：

$\left(\frac{n}{6}-(g-4)\right)l \leq n+4l-6+k-lg \leq n+5l-6-lg$，即

$l \leq \frac{6(n-6)}{n-6}=6$，这与 $l \geq 7$ 矛盾，从而定理 2 的前一结论得证。

下面我们讨论定理 2 中不等式的界“$\frac{n}{6}-(g-4)$”不能用“$\frac{n}{6}-(g-4)-1$”取代，否则，有如下反例 G_2（见图 2），此时 $g=3$。显然，G_2 为 3- 连通简单图，且对任意依次相邻的 3 点 u，v，w 有

$$\max\{d(u),d(v),d(w)\} \geq \frac{n}{6}-(g-4)-1=3。$$

下面说明 G_2 不是上可嵌入的。取 G_2 中边子集 $A=\{e_1,e_2,\cdots,e_9\}$。因为 G/A 有 6 个分支，且每个分支的 Betti 数为奇数，即 $b(G_2/A)=c(G_2/A)=6$。由引理 2 知 $\xi(G_2) \geq b(G_2/A)+c(G_2/A)-|A|-1=6+6-9-1=2$，从而 G_2 不是上可嵌入的。说明定理 2 中不等式的界是最好的。

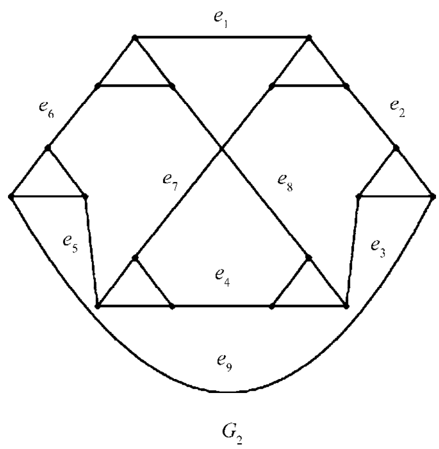


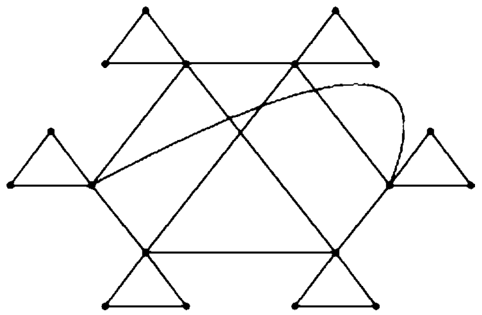
图 2　非上可嵌入的 3- 连通图举例

Fig. 2　For example unupper embeddable 3-connected graph

注记 定理2中条件“3-连通”不能改为“3-边连通”，否则有反例 G_3（见图3）。显然 G_3 是3-边连通图，且满足对任意相邻的3点 u,v,w，有

$$\max\{d(u),d(v),d(w)\}\geq\frac{n}{6}-(3-4)=\frac{n}{6}+1。$$

用类似于证明反例 G_1 和 G_2 不是上可嵌入的方法，易证 G_3 不是上可嵌入的。



G_3

图3 围长为3的非上可嵌入3-边连通图举例

Fig. 3 For example unupper embeddable 3-edge-connected graph whose girth is 3

参考文献：

[1] Skoviera M. The Maximum of Graphs of Diameter Two[J]. Discrete Math，1991，87：175-180.

[2] Huang Y Q，Liu Y P. The maximum genus of graphs with diameter three[J]. Discrete Mathematica，1999，194：139-149.

[3] Kundu S. Bounds on Number of Disjoint Spanning Trees[J]. J. Combininatorial Theory，1974，B(17)：199-203.

[4] Huang Y Q，Liu Y P. Upper Embeddability of Graphs and Sum of the Degree of the Unneighbored Vetex[J]. Chinese Annals of Mathematics，1998，19A(5)：651-656.

[5] Huang Y Q，Liu Y P. Maximum genus and girth ofa graph[J]. Journal of Mathematics Research And Exposition，2000，20(2)：187-193.

[6] 黄元秋. 与最小度有关的图的最大亏格的下界[J]. 应用数学学报，1999，22(3)：193-198.

[7] 黄元秋，刘彦佩. 图的最大亏格与图的顶点划分[J]. 数学学报，2000，43(3)：645-652.

[8] 黄元秋，刘彦佩. 关于点在modulo4下的等值上可嵌入图类[J]. 数学物理学报，2000，20(2)：251-252.

[9] 黄元秋，刘彦佩. 图的最大亏格与2-因子[J]. 数学年刊，1997，18A(5)：567-596.

[10] Huang Y Q，Liu Y P. Maximum Genus and Maximum Nonseparating IndependentSet of a 3-regular Graph[J]. Discrete Mathematica，1997，176：149-158.

[11] Huang Linfu，Tsai Mingchun. The Maximum Genus of Graphs of Three Diameter[J]. Australasion J. Combininatorics，1996，14：171-187.

[12] 刘端凤，黄元秋. 关于图的最大亏格与割点数[J]. 广东工业大学学报，2005，22(3)：121-123.

[13] 吕长青，任 韩. 近三角剖分图的最大亏格与1-因子[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2006，5：66-71.

[14] 何卫力，刘彦佩. 关于图的上可嵌入性的一个新的邻域条件[J]. 运筹学学报，2003，7(3)：92-96.

[15] 黄元秋，刘彦佩. 图的上可嵌入性与非邻节点度和[J]. 数学年刊，1998，19A(5)：651-656.

[16] 任 韩，吕长青，马登举，卢俊杰. 关于图的余树的奇连通分支数的内插定理[J]. 应用数学学报，2005，28(3)：546-550.

[17] 吴向群，任 韩. 范条件图的上可嵌入性[J]. 泉州师范学院学报：自然科学版，2003，22(2)：44-46.

[18] Nebesky L. A New Characterization of the Maximum Genus of a Graph[J]. Czech. Math. J.，1981，31(106)：604-613.

[19] Bondy J A，Murty U S R. Graph theory with appli cations[M]. London：MacMillan，1976.

[20] Nordhaus E A，Stewart B M，White A T. On the Maximum Genus of a Graph[J]. J. Combin. Theory，1971(11)：258-267.

[21] Liu Y P. Embeddability in Graphs[M]. Beijing：Science Press，1994.

[22] Huang Y Q，Liu Y P. An Improvement of A Theorem on the Maximum Genus for Graphs[J]. Acta Mathe-\indent matical Applicatac Sinica，1998，11(2)：109-112.