第21卷第4期　　湖南工业大学学报　　Vol.21 No.4
2007年7月　　Journal of Hunan University of Technology　　July 2007

两个中心Cantor集的算术和的盒维数估算

易涤尘

（湖南对外经济贸易职业学院，湖南 长沙 410114）

摘　要：提出估计盒维数的一种实用方法，对中心Cantor集的盒维数进行了估计，并对2个中心Cantor集的算术和的盒维数作了估计。

关键词：Cantor集；盒维数；正项收敛级数

中图分类号: O144　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1673-9833(2007)04-0044-04

Estimating of Box Dimension for the Arithmetic Sum of Two Cantor Sets

Yi Dichen

（Hunan College of International Business & Economics，Changsha 410114，China）

Abstract: A practical method of estimating the box dimension is proposed. Then the Cantor set in the center of the box dimension is estimated as well as the box dimension of the arithmetic sum of two Cantor set.

Key words: Cantor set; box dimension; positive convergent series

与动力系统的一些问题相关，J.Palis提出[1]：2个Lebesgue测度为0的Cantor集的算数差（或和），是否是Lebesgue测度为0，或者包含一个区间？此问题引发了与此相关的算数和的研究。

本文对一般的中心Cantor集的盒维数进行估计，对满足某个条件的中心Cantor集，是一个很好的估计。

1　预备知识

1.1　中心Cantor集

康托尔集[2]：将闭区间[0，1]3等分，去掉中间的开区间$\left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)$，剩下2个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$；再把这2个闭区间各3等分，去掉中间的2个开区间，即$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$。一般当进行到第$n$次时，一共去掉$2^{n-1}$个开区间，剩下$2^n$个长度是$3^{-n}$的互相隔离的闭区间，而在第$n$+1次时，再将这$2^n$个闭区间各3等分，并去掉中间的一个开区间，如此继续下去，就从[0，1]去掉了可数个互不相交（而且没有公共端点）的开区间。因此，由定理2，剩下的必是一个闭集（它至少包含各邻接区间的端点及其聚点），它称为康托尔集。

如下方法可以在R中构造一个中心Cantor集：任选一个闭区间K_0，除去1个中间的开区间，留下2个区间。令K_1是剩余2个区间的并，对于K_1中的2个区间重复此过程（要求移除的2个中间区间长度相等），获得1个紧集K_2，它是2^2个相同长度的区间的并。由归纳步骤得，对于每个$\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}$，构造1个集合$K_n$，使其成为$2^n$相同长度的区间的并。中心Cantor集是所有这些集合的交$C=\bigcap_{i\geq 1}K_i$。

1.2　正项级数

设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是收敛的正项级数，N是自然数的全体，且$0<a_{n+1}\leqslant a_n$，令

$$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)=\left\{\sum_{n\in F}a_n\,\middle|\,F\subset\mathbf{N}\right\},\quad r_n=\sum_{s=n+1}^{+\infty}a_s,$$

$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)$称为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$的子和集，$r_n$称为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$的第$n$个尾巴。

收稿日期：2007-05-17

作者简介：易涤尘（1957-），男，湖南长沙人，湖南对外经济贸易职业学院讲师，主要研究方向为分析与小波.

由参考文献[3]有下面的引理。

引理　令$\sum_{n\geq 0}a_n$为一收敛的正项级数，且再令

$$0<a_{n+1}<a_n,\quad A_1=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,a_n>\sum_{s>n}a_s\right\};$$

$$A_2=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,a_n\leq\sum_{s>n}a_s\right\},$$

则：1）如果A_2=**N**（相当于$A_1=\varnothing$），有

$$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)=\left[0,\sum_{n\geq 0}a_n\right],$$

并且$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)$是1个区间当且仅当$A_2$=**N**；

2）如果A_1=**N**（相当于$A_2=\varnothing$），则$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)$为一中心Cantor集；

3）集合$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)$可能是下述3种情形之一：

闭区间的有限并；同胚于三分Cantor集；同胚于$M\left(\sum_{n\geq 1}b_n\right)$，其中$b_{2n-1}=\dfrac{3}{4^n},b_{2n}=\dfrac{2}{4^n}$，$n\geq 1$。

1.3　中心Cantor集与正项级数的对应关系

现在展示一种中心Cantor集合与一些无穷级数之间的对偶形式，也就是说，对于每个中心Cantor集，将其对应于唯一的一个无穷正项级数，使得其子和集正是原始的中心Cantor集。

令C是一个中心Cantor集，记a是K_0的右端点，r_0、a_0是从K_0中被移去的中间区间的左、右端点，归纳地记r_n和a_n是由K_n的2^n个区间的第一个区间中被移去的中间区间的左、右端点（$a_n>r_n$），有$\sum_{n\geq 0}a_n=a$以及$r_n=\sum_{s>n}a_s$。另外，级数$\sum_{n\geq 0}a_n$满足引理的2）（$a_n>r_n$且$0<a_{n+1}<a_n,n\in\mathbf{N}$，由构造知），则知$M\left(\sum_{n\geq 0}a_n\right)$是一个中心Cantor集。事实上，恰为$C$。

注意到集合C的Lebesgue测度（记为$\lambda(C)$）是可以简便求得的。事实上，

$$\lambda(C)=a-\sum_{n\geq 0}2^n\left(a_n-\sum_{s>r}a_s\right)=\lim_{n\to\infty}2^n r_n。$$

下述命题的证明直接可以获得。

命题　令C_1，C_2，…，C_k是k个中心Cantor集，则k个中心Cantor集的算术和

$C_1+C_2+\cdots+C_k=\{c_1+c_2+\cdots+c_k|c_i\in C_i$，$i$=1，2，…，$k\}$是可以视作某一个满足$a_n\geqslant a_{n+1}$的正项级数$\sum_{n\geq 0}a_n$的子和集。由此，上述引理的结论可以应用到$C_1+C_2+\cdots+C_k$。

1.4　盒维数

设F是R^n上任意非空的有界子集，$N_\delta(F)$是直径最大为δ，可以覆盖F的集的最少个数，则F的下、上计盒维数分别定义为：

$$\underline{\dim}_B F=\varliminf_{\delta\to 0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta};$$

$$\overline{\dim}_B F=\varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}。$$

如果这2个值相等，则称这共同的值为F的计盒维数或盒维数[4]，记为：

$$\dim_B F=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}。$$

例1　计算$F=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$的盒维数。

计算　如果$|U|=\delta\prec\dfrac{1}{2}$，$k$是满足$\dfrac{1}{k(k-1)}\succ\delta\succ\dfrac{1}{k(k+1)}$的整数，则$U$最多能覆盖$U\left\{1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{k}\right\}$中的一个点，因此覆盖$F$最少需要直径为$\delta$的集$k$个，故

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}\geq\frac{\log k}{-\log\delta}\geq\frac{\log k}{-\log(k+1)k}。$$

令$\delta\to 0$，得$\dim_B F\geq\dfrac{1}{2}$，而另一方面$\dfrac{1}{2}\succ\delta\succ 0$，取$k$满足$\dfrac{1}{k(k-1)}\succ\delta\succ\dfrac{1}{k(k+1)}$，则（$k$+1）的长度为$\delta$的区间覆盖$\left[0,\dfrac{1}{k}\right]$，留下$F$的（$k$−1）个总可以有另外（$k$−1）个区间覆盖，则$\dfrac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}\leq\dfrac{\log 2k}{\log(k-1)k}$，$b_n=r_n$。故有$\dim_B F\leq\dfrac{1}{2}$，这个集几乎每一点都是相互分离的，没有把它看成分形集，但它却有分形的盒维数。

注记：盒维数的定义中的$N_\delta(F)$可以是下列5个数中的任何一个：

1）覆盖F的半径为δ的最少闭球数；

2）覆盖F的边长为δ的最少的立方体数；

3）与F相交的δ－网立方体的个数；

4）覆盖F的直径最大为δ的集的最少个数；

5）球心在F上，半径为δ的互相不相交的球的最多个数。

2 中心 Cantor 集的盒维数估计

定理 由收敛正项级数$\sum_{n\ge 0} a_n$给出的中心Cantor集C的上、下盒维数分别满足：

$$1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^{n+1}}{-\log r_{n+1}} \le \overline{\dim}_B C \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^n}{-\log b_n}; \quad (1)$$

$$2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^{n+1}}{-\log r_{n+1}} \le \underline{\dim}_B C \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^n}{-\log b_n}。 \quad (2)$$

其中：$b_n=\min\{r_n，a_n-r_n\}$；r_n 为$\sum_{n=0}^{\infty}$的第 n 个尾巴。

证明 首先估计$\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta}$。

显然，C 可由 2^n 个长度为 r_n 的闭区间覆盖，故当$d \prec b_n = \min(r_n, a_n - r_n)$时，有

$$\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta} \ge \frac{\log 2^n}{-\log\delta} \ge \frac{\log 2^n}{-\log b_n}。 \quad (3)$$

下面考虑$\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta}$的下界。

由于K_n中每个区间的端点均包含在Cantor集C中，因此所选取的区间至少要覆盖住这些端点，而当$\delta \prec b_n = \min(r_n, a_n - r_n)$时，容易看出每个长度为 δ 的闭区间最多只能包含 K_n 中的一个端点，因此，所需区间个数 $N_\delta(C)$ 至少为 K_n 的端点个数 $2^{n+1}, n\in\mathbf{N}$，故当$r_{n+1} \prec \delta \prec b_n$时，

$$\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta} \ge \frac{\log 2^{n+1}}{-\log\delta} \ge \frac{\log 2^{n+1}}{-\log r_{n+1}}, \quad (4)$$

对于$r_{n+1} < d \prec b_n \le r_n$，当 $n\to\infty$ 时，$\delta\to 0$。
故对式（3）、（4）均分别取上极限和下极限，即可得到：

$$1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^{n+1}}{-\log r_{n+1}} \le \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^n}{-\log b_n};$$

$$2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^{n+1}}{-\log r_{n+1}} \le \underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(C)}{-\log\delta} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log 2^n}{-\log b_n}。$$

至此完成了定理的证明。该定理给出了对于任一中心Cantor集的盒维数的估计。

下面的推论说明，对于很大一部分中心Cantor集，这是一个很好的估计，我们甚至可以计算出其盒维数。

推论 当$2r_n \le a_n$时，中心Cantor集C的盒维数由下式得出：$\dim_B(C) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{-\log r_n}$。

证明 应用前面的定理，此时$r_n=b_n$，式（1）、（2）中均取等号，即可得到结论。

3 两个中心 Cantor 集的算术和的盒维数计算

由预备知识知道，中心Cantor集与满足一定条件的无穷正项级数的子和集有对应关系。

例2 以对应于级数$\sum_{n\ge 1}\frac{8}{81^n}$和$\sum_{n\ge 1}\frac{72}{81^n}$的Cantor集$A_1$和$A_2$为例，计算它们的盒维数及其算术和的盒维数。

$$对A_1 = M\left(\sum_{n\ge 1}\frac{8}{81^n}\right), \qquad r_n = \sum_{k\ge n+1}\frac{8}{81^n\times 10},$$

$$2r_n = \frac{1}{81^n\times 5} < a_n = \frac{8}{81^n},$$

$$2r_n = \sum_{k\ge n+1}\frac{1}{81^n\times 5} \prec a_n = \frac{8}{81^n},$$

故由推论计算其盒维数：

$$\dim_B(A_1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{-\log\frac{1}{81^n\times 10}} = \frac{\log 2}{\log 81}。$$

$$对A_2 = M\left(\sum_{n\ge 1}\frac{72}{81^n}\right), \qquad r_n = \sum_{k\ge n+1}\frac{72}{81^n\times 10},$$

$$2r_n = \sum_{k\ge n+1}\frac{9}{81^n\times 5} \prec a_n = \frac{72}{81^n},$$

同理可得：

$$\dim_B(A_2) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{-\log\frac{9}{81^n\times 10}} = \frac{\log 2}{\log 81}。$$

记$a_n = \frac{8}{81^n}, b_n = \frac{72}{81^n}$。由于Cantor集$A_1$和$A_2$中的点分别对应级数$\sum_{n\ge 1} a_n, \sum_{n\ge 1} b_n$的子序列和，因此将通项$a_n$，$b_n$的值合起来由大到小排列：$\frac{8}{9}, \frac{8}{9^2}, \frac{8}{9^3}$，……发现通项可表示为$c_n = \frac{8}{9^n}$，则集合$A_1$和$A_2$的算术和$C = M\left(\sum_{n\ge 1} c_n\right)$。

因为$r_n = \sum_{k\ge n+1}\frac{8}{9^n} = \frac{1}{9^n} \prec a_n = \frac{8}{9^n}$，故由引理中的2）易知，$C$仍然为一个中心Cantor集，用推论可以计算它的盒维数：

$c_n = \frac{8}{9^n}$，$\quad r_n = \frac{1}{9^n} \prec a_n = \frac{8}{9^n}$，由推论得：

$$\dim_B C = \frac{\log 2}{\log 9}。$$

例 3　以对应于级数$\sum\limits_{n\ge1}\frac{5}{36^n}$和级数$\sum\limits_{n\ge1}\frac{30}{36^n}$的Cantor集$A_1$和$A_2$为例，计算它们的盒维数及其算术和的盒维数。

$$A_1=M\left(\sum_{n\ge1}\frac{5}{36^n}\right),\qquad r_n=\sum_{k\ge n+1}\frac{5}{36^k}=\frac{1}{36^n\times7},$$

$$2r_n=\frac{2}{36^n\times7}\prec a_n=\frac{5}{36^n},$$

故由推论计算其盒维数：

$$\dim_B(A_1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{-\log\frac{1}{36^n\times7}}=\frac{\log2}{\log36}。$$

$$A_2=M\left(\sum_{n\ge1}\frac{30}{36^n}\right),\qquad r_n=\sum_{k\ge n+1}\frac{30}{36^k}=\frac{6}{36^n\times7},$$

$$2r_n=\frac{12}{36^n\times7}\prec a_n=\frac{30}{36^n},$$

同理可得：

$$\dim_B(A_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{-\log\frac{6}{36^n\times7}}=\frac{\log2}{\log36}。$$

记$a_n=\frac{5}{16^n},b_n=\frac{30}{16^n}$。由于Cantor集$A_1$和$A_2$中的点分别对应级数$\sum\limits_{n\ge1}a_n,\sum\limits_{n\ge1}b_n$的子序列和，因此将通项$a_n$，$b_n$的值合起来由大到小排列：$\frac{5}{6},\frac{5}{6^2},\frac{5}{6^3}$，……发现通项可表示为$c_n=\frac{5}{6^n}$，则集合$A_1$，$A_2$的算术和$C=M\left(\sum\limits_{n\ge1}c_n\right)$。因为$r_n=\sum\limits_{k\ge n+1}\frac{5}{6^n}=\frac{1}{6^n}\prec a_n=\frac{5}{6^n}$，故由引理中的2）易知，$C$仍然为一个中心Cantor集，同例2的方法，可以计算它的盒维数：

$$c_n=\frac{5}{6^n},\ r_n=\frac{1}{6^n}\prec a_n=\frac{5}{6^n}，由推论得：$$

$$\dim_B C=\frac{\log2}{\log6}。$$

4　结论

利用中心Cantor集与满足一定条件的无穷正项级数的子和集有对应关系，可以利用级数来计算多种盒维数及其算术和的盒维数。

参考文献：

[1] Palis J，Takens F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: fractal dimensions and in_nitely many attractors[M]. Director of Adimissions：Cambridge Univ. Press，1993.

[2] 贺福利. Cantor集的几个性质及其证明[J]. 高等函授学报：自然科学版，2003，16（3）：15-26.

[3] Razvan Anisca，Monica Ilie. A Technique of Studying Sums of Central Canta Sets[J]. CMB，2001，144（1）：12-18.

[4] Falconer K J. 分形几何——数学基础及其应用[M]. 曾文曲，刘世耀译. 沈阳：东北大学出版社，1991.

[5] 刘培德. 实变函数教程[M]. 北京：科学出版社，2006.