具有不确定系数的T-S模糊控制系统的BIBO鲁棒镇定

钟守铭

（电子科技大学 应用数学学院，四川 成都 610054）

摘　要：研究了一类具有不确定系数的T-S模糊控制系统的鲁棒BIBO镇定问题，应用稳定的状态反馈控制，通过构造Lyapunov-Krasovskii泛函，采用线性矩阵不等式（LMI）方法，给出了T-S模糊连续控制系统Robust有界输入有界输出镇定的充分条件；当参考的输入信号 $r(t)\equiv 0$ 时，给出了T-S模糊连续控制系统的零解鲁棒镇定的充分条件。

关键词：T-S模糊控制系统；Lyapunov-Krasovskii泛函；LMI方法；镇定

中图分类号: TP273　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1673-9833(2007)04-0036-05

Robust BIBO Stabilization of T-S Fuzzy Control Systems with Uncertain Coefficient

Zhong Shouming

（School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology in China, Chengdu 610054，China）

Abstract: The problem of robust bounded-input bounded-output（BIBO）stabilization for Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy control systems with uncertain coefficient is considered. Applying a stabilizing state feedback control to systems，making use of the Lyapunov-Krasovskii functional and combining the method of the linear matrix inequalities（LMI），the sufficient conditions of robust BIBO stabilization for T-S fuzzy control systems are obtained. When the reference input $r(t)\equiv 0$，the sufficient conditions of robust stabilization for T-S fuzzy control systems with uncertain coefficient can be obtained.

Key words: T-S fuzzy control system；Lyapunov-Krasovskii functional；the method of the linear matrix inequality；stabilization.

0　引言

鲁棒稳定性问题一直是控制理论研究的一个重要课题，特别是近10多年来，不确定系统的鲁棒镇定问题引起了自动控制和应用数学研究工作者的极大兴趣。在许多实际控制问题中，不确定性常常出现在动力系统中，这主要是建立数学模型的误差和测量的误差造成的。扰动的出现给原来稳定系统的鲁棒稳定性分析和设计带来许多新的研究课题，为保证系统的鲁棒镇定，已有不少的研究成果[1-4]；另一方面，T-S模糊连续控制系统在近10年来也得到广泛的研究，Takagi和Sugeno首先提出了T-S模糊连续模型[5]，后来他们又给出了模糊控制系统的稳定性分析和设计[6]，Tanaka等人又给出了T-S模糊连续系统和T-S模糊离散系统的新的松弛稳定性条件，以及基于LMIs方法的模糊调节器和模糊观测器的设计[7]。时间滞后也常常出现在控制系统中，使得有些本来稳定的系统因为时滞的作用变得不稳定了，文献[8-10]提供了解决这类问题的一些途径。但是，这些研究大部分是针对Lyapunov稳定性来讨论的，而在实际问题中，有时希望控制系统能够追踪输入信号，对有界输入有界输出（BIBO）镇定的研究是很有意义的[11]。对于具有不确定系数的T-S模糊控制系统的Robust BIBO镇定的研

收稿日期：2007-06-11

作者简介：钟守铭（1955-），男，四川什邡人，电子科技大学教授，博士生导师，主要从事应用数学方面的教学与研究.

究还未见到，因此，本文试图对这类控制系统的Robust BIBO镇定问题进行研究，从而获得T-S模糊扰动控制系统的Robust BIBO镇定的条件。

1　问题的提出

T-S模糊连续系统模型是Takagi和Sugeno首先提出的，它以模糊IF-THEN规则表示非线性系统的局部线性输入输出关系。T-S模糊连续系统模型的第i条规则为

R_i: IF $z_1(t)$ is $\boldsymbol{M}_{i1}$ and $\cdots$ and $z_p(t)$ is $\boldsymbol{M}_{ip}$, THEN

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\left(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t)\right)\boldsymbol{x}(t)+\left(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i(t)\right)\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\left(\boldsymbol{C}_i+\Delta\boldsymbol{C}_i(t)\right)\boldsymbol{x}(t)。\end{cases}\qquad(1)$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

其中：$z_i(t)$（i=1, 2 , ⋯ , p）是前件变量，为避免解模糊过程的复杂性，本文假设前件变量不依赖于输入向量$\boldsymbol{u}(t)$和输出变量$\boldsymbol{y}(t)$；

$\boldsymbol{M}_{ij}$是模糊集；

N是IF-THEN规则的数目；

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$是状态向量；

$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^r$是控制输入向量；

$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^m$是控制输出向量；

$\boldsymbol{A}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$和$\boldsymbol{C}_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$是常数矩阵；

$\Delta\boldsymbol{A}_i(t)$、$\Delta\boldsymbol{B}_i(t)$和$\Delta\boldsymbol{C}_i(t)$是具有相应维数的时变不确定矩阵，并且它们满足

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{A}_i(t)=\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{1i},\\ \Delta\boldsymbol{B}_i(t)=\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i},\\ \Delta\boldsymbol{C}_i(t)=\boldsymbol{D}_{3i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{3i}。\end{cases}\qquad(2)$$

式（2）中：$\boldsymbol{D}_{ji}$和$\boldsymbol{E}_{ji}$（$j=1,2,3$；i =1, 2, ⋯, N）是具有相应维数的已知实常数矩阵 ；

而不确定的时变矩阵$\boldsymbol{F}_i(t)$（i =1, 2, ⋯ , N）的每个元素是Lebesgue可测的，并且满足

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_i(t)\le\boldsymbol{I},\ (i=1,2,\cdots,N),\qquad(3)$$

式（3）中：$\boldsymbol{I}$是相应维数的单位矩阵。

对模糊系统（1），采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊，最终的模糊系统的输出可表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)\left[\left(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t)\right)\boldsymbol{x}(t)+\left(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i(t)\right)\boldsymbol{u}(t)\right],\\ \boldsymbol{y}(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)\left(\boldsymbol{C}_i+\Delta\boldsymbol{C}_i(t)\right)\boldsymbol{x}(t),\end{cases}\qquad(4)$$

式（4）中：$h_i\boldsymbol{z}(t)=\dfrac{w_i\boldsymbol{z}(t)}{\sum_{i=1}^{N}w_i\boldsymbol{z}(t)}$，$(i=1,2,\cdots,N)$.

这里：$\boldsymbol{z}(t)=\left[z_1(t),z_2(t),\cdots,z_p(t)\right]^{\mathrm{T}}$；

$$\begin{cases}w_i\boldsymbol{z}(t)=\prod_{j=1}^{p}\boldsymbol{M}_{ij}z_j(t)\ge 0,\\ \sum_{i=1}^{N}w_i\boldsymbol{z}(t)>0,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,N)；\qquad(5)$$

$\boldsymbol{M}_{ij}z_j(t)$是$z_j(t)$在模糊集$\boldsymbol{M}_{ij}$中的隶属度函数。

由式（5）可知

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)=1,\\ h_i\boldsymbol{z}(t)\ge 0,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,N)。$$

为了能追踪控制系统的输入信号，采用的模糊控制律的第i条规则为S_i: IF $z_1(t)$ is $\boldsymbol{M}_{i1}$ and $\cdots$ and $z_p(t)$ is $\boldsymbol{M}_{ip}$, THEN

$$\boldsymbol{u}(t)=K_i\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{r}(t),\ (i=1,2,\cdots,N)。\qquad(6)$$

采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊，最终的模糊控制律可表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)K_i\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{r}(t)。\qquad(7)$$

将控制律（7）代入系统（4），得到T-S模糊控制系统的闭环模糊系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)+\bar{\boldsymbol{B}}_2(t)\boldsymbol{r}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}(t)\boldsymbol{x}(t),\end{cases}\qquad(8)$$

$$\text{其中}\begin{cases}\bar{\boldsymbol{A}}(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)\left[\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t)\right],\\ \bar{\boldsymbol{B}}_1(t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)h_j\boldsymbol{z}(t)\left[\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i(t)\right]K_j,\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)\left[\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i(t)\right],\\ \bar{\boldsymbol{C}}(t)=\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{z}(t)\left[\boldsymbol{C}_i+\Delta\boldsymbol{C}_i(t)\right]。\end{cases}$$

考虑系统（8）的初始条件为

$$x_{t_0}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta)\left(\forall\theta\in[-\tau,0]\right),\qquad(9)$$

式中$\boldsymbol{\phi}(\theta)$在区间$[-\tau,0]$上连续，且记

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_\tau=\sup_{-\tau\le\theta\le 0}\left\{\|\boldsymbol{\phi}(\theta)\|\right\}。$$

在给出T-S模糊控制系统的稳定性定理之前，先给出BIBO镇定的定义和有关引理。

定义1[11]　对$\forall\boldsymbol{r}(t)\in\boldsymbol{R}^r$，如果

$\|\boldsymbol{r}\|_\infty=\sup_{t\in[t_0,\infty)}\left\{\|\boldsymbol{r}(t)\|\right\}<\infty$，则记$\boldsymbol{r}(t)\in L_\infty^r$。

定义2[11]　如果对 $\forall\boldsymbol{r}(t)\in L_\infty^r$，存在非负常数$\theta_i$（$i=1,2$），使得闭环系统（8）的输出满足$\|\boldsymbol{y}(t)\|\le\theta_1\|r\|_\infty+\theta_2$，则称模糊系统（4）在模糊控制律（7）下是有界输入有界输出（BIBO）镇定的。

引理1（Schur补）　给定常数对称矩阵Σ_1、Σ_2

和具有相应维数的矩阵Σ 3，则矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{\Sigma}_3\\ \boldsymbol{\Sigma}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Sigma}_2\end{pmatrix}<0$的充分必要条件是$\begin{cases}\boldsymbol{\Sigma}_2<0,\\ \boldsymbol{\Sigma}_1-\boldsymbol{\Sigma}_3\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_3^{\mathrm{T}}<0。\end{cases}$

引理 2[12] 给定对称矩阵$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}>0$和具有相应维数的矩阵$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$，对所有的$\boldsymbol{F}(t)$满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{R}$，则$\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{HF}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$的充要条件是存在$\varepsilon>0$，使得$\boldsymbol{Q}+\varepsilon\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RE}<0$。

2 主要结论

定理 1 对于系统（8），若存在对称矩阵$\boldsymbol{P}>0$和$\boldsymbol{R}>0$，对$i=1,2,\cdots,N$，使得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}_i+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{P} & \boldsymbol{PD}_{1i} & \boldsymbol{PD}_{2i} & \boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & \boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0\\ \boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{E}_{1i} & \boldsymbol{E}_{2i} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}\end{pmatrix}<0, \qquad (10)$$

线性矩阵不等式（LMI）成立，则系统（8）的零解是BIBO镇定的。

证 取Lyapunov-Krasovskii泛函为$V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Px}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Rx}(s)\mathrm{d}s$，泛函$V(t)$沿系统（8）的右上导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Rx}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Rx}(t-\tau)=\\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\left[\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+\bar{\boldsymbol{B}}_2 r(t)\right]+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Rx}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Rx}(t-\tau)=\\ &\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_ih_j\Big\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\left(\boldsymbol{PA}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PB}_i\boldsymbol{x}(t-\tau)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Rx}(t-\tau)+\\ &2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PD}_{1i}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{E}_{1i}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PD}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i}\boldsymbol{x}(t-\tau)\Big\}+2\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\left[\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i}\right]\boldsymbol{r}(t)\leqslant\\ &\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_ih_j\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi} & \boldsymbol{PB}_i\\ \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R}+\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{2i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-\tau)\end{pmatrix}+\beta\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|,\end{aligned}$$

其中：

$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{PA}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{PD}_{1i}\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PD}_{2i}\boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{1i}$；

$\beta=2\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\boldsymbol{PB}_i\right\|+\left\|\boldsymbol{PD}_{2i}\right\|\left\|\boldsymbol{E}_{2i}\right\|\right)\left\|\boldsymbol{r}\right\|_{\infty}$。

由定理1的条件（10）和Schur补可知

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi} & \boldsymbol{PB}_i\\ \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R}+\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{2i}\end{pmatrix}<0, \quad (i=1,2,\cdots,N),$$

所以存在常数$\mu>0$，使得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Pi} & \boldsymbol{PB}_i\\ \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R}+\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{2i}\end{pmatrix}\leqslant\mu\boldsymbol{I}<0,\ (i=1,2,\cdots,N),$$

于是有: $$\dot{V}(t)\leqslant-\mu\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|^2+\beta\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|。\qquad (11)$$

下面证明

$$\boldsymbol{V}(t)\leqslant[\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})]\left[\left\|\phi\right\|_{\tau}^2+\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2\right]=L。\qquad (12)$$

如果对$\forall t\geqslant t_0$均有$V(t)\leqslant V(t_0)$，于是有

$V(t)\leqslant[\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})]\left\|\phi\right\|_{\tau}^2\leqslant L$。

如果$\exists t>t_0$，使得对$\forall s\in[t_0,t)$时，有$\boldsymbol{V}(s)<\boldsymbol{V}(t)$，此时有$\dot{V}(t)\geqslant0$，由式（11）有$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\leqslant\dfrac{\beta}{\mu}$，于是有

$V(t)\leqslant[\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})]\left(\dfrac{\beta}{\mu}\right)^2\leqslant L$。

从而对$\forall t\geqslant t_0$，有$V(t)\leqslant L$，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|^2\leqslant\boldsymbol{V}(t)\leqslant L$，

$$\begin{aligned}&\text{即}\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}\left[\left\|\phi\right\|_{\tau}^2+\frac{\beta^2}{\mu^2}\right]}\leqslant\\ &\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}}\left[\left\|\phi\right\|_{\tau}+\frac{\beta}{\mu}\right]=\\ &\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}}\left[\left\|\phi\right\|_{\tau}+\frac{2\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\boldsymbol{PB}_i\right\|+\left\|\boldsymbol{PD}_{2i}\right\|\left\|\boldsymbol{E}_{2i}\right\|\right)\left\|\boldsymbol{r}\right\|_{\infty}}{\mu}\right]。\end{aligned}$$

于是有$\left\|\boldsymbol{y}(t)\right\|\leqslant\theta_1\left\|r\right\|_{\infty}+\theta_2$，其中

$$\theta_1=\frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}}\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\boldsymbol{C}_i\right\|+\left\|\boldsymbol{D}_{3i}\right\|\left\|\boldsymbol{E}_{3i}\right\|\right)\times\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\boldsymbol{PB}_i\right\|+\left\|\boldsymbol{PD}_{2i}\right\|\left\|\boldsymbol{E}_{2i}\right\|\right),$$

$$\theta_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})+\tau\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})}}\sum_{i=1}^{N}\left(\left\|\boldsymbol{C}_i\right\|+\left\|\boldsymbol{D}_{3i}\right\|\left\|\boldsymbol{E}_{3i}\right\|\right)\left\|\phi\right\|_{\tau}。$$

从而可知系统（8）的零解是BIBO镇定的。

推论 1 对于系统（8），如果$\boldsymbol{r}(t)\equiv0$，且存在对称矩阵$\boldsymbol{P}>0$和$\boldsymbol{Q}>0$，对$i=1,2,\cdots,N$，使得线性矩阵不

等式（LMI）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{1i} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{2i} & \boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & \boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{E}_{1i} & \boldsymbol{E}_{2i} & 0 & 0 & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}<0$$

成立，则系统（8）的零解是Robust镇定的。

定理2　对于系统（8），若存在对称矩阵$\boldsymbol{P}>0$、$\boldsymbol{R}>0$和具有相应维数的矩阵$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$，存在正常数ε_1、ε_2、ε_3和μ，对$i, j=1, 2, \cdots, N$，使得线性矩阵不等式（LMI）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{\Pi}_{12} & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_1 & \varepsilon_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1i} & \varepsilon\boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon_3\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i} & 0 \\ * & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i & 0 & 0 & \varepsilon_2\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1i} & \varepsilon_3\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i} & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\mu\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{I} \end{pmatrix}<0 \tag{13}$$

成立，则系统（8）的零解是Robust BIBO镇定的，其中

$\boldsymbol{\Pi}_{11}=\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{R}$；

$\boldsymbol{\Pi}_{12}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2$；

$\boldsymbol{\Pi}_{22}=-\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$；

$\varepsilon=\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}$。

证　将方程（8）变为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{y}(t), \\ 0=-\boldsymbol{y}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)+\bar{\boldsymbol{B}}_2(t)\boldsymbol{r}(t), \end{cases} \tag{14}$$

取Lyapunov-Krasovskii泛函为

$$\boldsymbol{V}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,$$

泛函$\boldsymbol{V}(t)$沿系统（8）的右上导数为

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-\tau)=$$

$$2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\right]\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-\tau)=$$

$$2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\right]\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ -\boldsymbol{y}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)+\bar{\boldsymbol{B}}_2(t)\boldsymbol{r}(t) \end{pmatrix}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-\tau)=$$

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_1 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ * & -\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_1 & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t)+\mu\left\|\boldsymbol{r}(t)\right\|^2,$$

其中：$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau),\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}(t)\right]$；$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_1 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ * & -\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_1 & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_2 \\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 \\ * & * & * & -\mu\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$；

$*$表示对称矩阵的对称元素。

注意到$\boldsymbol{\Phi}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_ih_j\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{R} & \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i \\ * & -\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i \\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 \\ * & * & * & -\mu\boldsymbol{I} \end{pmatrix}+\right.$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{1i}+\boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i}\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i} \\ * & 0 & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i}\boldsymbol{K}_j & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_i(t)\boldsymbol{E}_{2i} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}\Bigg\}。$$

利用引理2和定理2的条件（13），有$\boldsymbol{\Phi}<0$，从而存在$\alpha>0$，使得

$$\dot{V}(t)\le -\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2+\mu\|\boldsymbol{r}\|_\infty^2, \tag{15}$$

类似于定理1的证明可知，T-S模糊控制系统（8）是鲁棒BIBO镇定的。

推论2 对于系统（8），如果$\boldsymbol{r}(t)\equiv 0$，且存在对称矩阵$\boldsymbol{P}>0$、$\boldsymbol{R}>0$和具有相应维数的矩阵$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$，存在正常数$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3$和$\mu$，对$i, j=1, 2, \cdots, N$，使得线性矩阵不等式（LMI）

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{\Pi}_{12} & \boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & \varepsilon_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1i} & \varepsilon\boldsymbol{E}_{1i}^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon_3\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i} & 0 \\ * & \boldsymbol{\Pi}_{22} & \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_j & 0 & 0 & \varepsilon_2\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{1i} & \varepsilon_3\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{2i} & 0 \\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{2i}^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{I} \end{pmatrix}<0$$

成立，则系统（8）的零解是Robust镇定的，其中

$\boldsymbol{\Pi}_{11}=\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{R}$;

$\boldsymbol{\Pi}_{12}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2$;

$\boldsymbol{\Pi}_{22}=-\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}$;

$\varepsilon=\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1}$。

3 结语

本文研究了一类具有不确定系数的T-S模糊控制系统的鲁棒镇定问题。为了追踪输入信号，除了应用稳定的状态反馈控制外，增加了参考输入信号，通过构造Lyapunov-Krasovskii泛函，采用线性矩阵不等式（LMI）方法，给出了T-S模糊连续控制系统鲁棒BIBO镇定的充分条件；当参考的输入信号$\boldsymbol{r}(t)\equiv 0$时，给出了T-S模糊连续控制系统的零解鲁棒镇定的充分条件。

参考文献：

[1] Boukas E K，Muthairi N F Al. Delay-dependent stabilization of singular linear systems with delay[J]. Int. J. Innovative Comput. Inform. Control，2006，2：283-291.

[2] Souza C E de，Li X. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems[J]. Automatica，1999，35：1313-1321.

[3] Feron E，Apkarian P，Gahinet P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions[J]. IEEE Trans. Automat. Control，1996，41：1041-1046.

[4] Fridman E，Shaked U. Parameter-dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems[J]. IEEE Trans. Automat. Control，2003，48：861-866.

[5] Takagi T，Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans. Systems，Man，Cybernetics，1985，15：116-132.

[6] Tanaka K，Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets Systems，1992，45：135-156.

[7] Tanaka K，Ikeda T，Wang O H. Fuzzy regulators and fuzzy observers：relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. IEEE Trans. Fuzzy Systems，1998，6：250-265.

[8] Xu D Y，Zhong S M，Yan X W. Robust BIBO stabilization of linear large-scale systems with nonlinear delay perturbations [J]. Dynamics of Continuous，Discrete and Impulsive Systems，1996，2：511-520.

[9] Liu X，Zhang H. New stability criterion of uncertain systems with time-varying delay[J]. Chaos，Solitons and Fractals，2005，26：1343-1348.

[10] Gao H，Lam J，Wang C. Delay-dependent output-feedback stabilization of discrete-time systems with time-varying state delay[J]. IEE Proc. Control Theory Appl.，2004，151：691-698.

[11] Wu H，Mizukami K. Robust stabilization of uncertain linear dynamical systems[J]. Int. J. Systems Sci.，1993，24：265-276.

[12] Xie L. Output feedback control of systems with parameter uncertainty[J]. Int. J. Control，1996，63：741-750.