一种基于Vague集的不确定多属性决策方法

汪新凡[1]，高　兴[2]

(1.湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008；2.株洲职业技术学院，湖南 株洲 412001)

摘　要：提出了一种基于Vague集的不确定多属性决策方法。首先通过定义单指标的Vague集真、假隶属函数计算每个方案的单指标Vague值，然后利用单指标Vague值加权计算得到每个方案的多指标综合Vague值，最后给出两个具有直观意义且计算简便的排序准则，利用它们对方案进行排序并选出最优方案，实例分析表明了该方法的可行性和有效性。

关键词：多属性决策；真/假隶属函数；Vague集；Vague值；排序

中图分类号：O223，N945.25　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2007)03-0017-04

Decision Making Method of Uncertain Multi-Attribute Based on Vague Set

Wang Xin-fan[1]; Gao Xing[2]

(1.College of Science, Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China；
2.Zhuzhou Professional Technology College，Zhuzhou Hunan 412001，China)

Abstract: Based on vague set theory, a method on decision making problems of uncertain multi-attribute is proposed. Firstly, the truth/false-membership function is defined to computing the single index vague value of each alternative. Then the multiple index synthetic vague value is gained by weighted computing of it. Finally, all alternatives are ranked by using two ranking criteria, and the best one is selected as a project to prove the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words：uncertain multi-attribute decision making；truth/false-membership function；vague set；vague value；ranking

0　引言

Vague集理论[1]是一种处理不确定性信息的理论，由Gau和Buehrer于1993年提出。Vague集是Zadeh于1965年提出的传统模糊集的一种推广形式，它在本质上等同于Atanassov于1986年提出的直觉模糊集[3]。传统模糊集能够较好地描述信息的不确定性，它所采用的单值的隶属度包含了支持和反对证据的程度，可它不能表示中立（既不支持又不反对）的证据。Vague集同时考虑隶属与非隶属两方面的信息，能够表示、处理传统模糊集所无法表示和处理的不确定信息，具有更强的表示能力，且更具灵活性。

Vague集理论在不确定多属性决策领域得到了广泛的应用，但目前的研究主要是提出了一系列不确定多属性决策问题的目标选择方法：记分函数法、加权记分函数法和距离法等[4-8]，并且关于Vague集真、假隶属函数确定问题的研究相对较少[8]。本文提出了一种应用Vague集理论处理不确定多属性决策问题的方法，以期为Vague集理论渗透于更多应用领域开拓新思路。

1　Vague集

论域U是一个点（对象）空间，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，其元素用$u_i(i=1,2,\cdots,n)$表示。U上的一个Vague集V用一个真隶属函数t_V和一个假隶属函数f_V表示，$t_V(u_i)$是从支持u_i的证据所导出的肯定隶属度的下界，$f_V(u_i)$则是从反对u_i的证据所导出的否定隶属度的下界，$t_V(u_i)$和$f_V(u_i)$

收稿日期：2007-01-23
基金项目：湖南省教育科学“十一五”规划课题基金资助项目（XJK06CJJ044）
作者简介：汪新凡（1966-），男，湖南安化人，湖南工业大学副教授，主要研究方向为决策理论与应用.

将U中的每一个点与区间[0,1]中的一个实数联系起来，即：t_V: $U\to[0,1]$，f_V: $U\to[0,1]$，其中$t_V(u_i)+f_V(u_i)\le 1$。元素u_i在Vague集V中的隶属度$\psi_V(u_i)$被区间[0,1]的一个子区间$[t_V(u_i)，1-f_V(u_i)]$所界定，称该区间为u_i在V中的Vague值，记作$\lambda_V(u_i)$。令$\pi_V(u_i)=1-t_V(u_i)-\varphi_V(u_i)$，称$\pi_V(u_i)$为元素$u_i$相对Vague集$V$的Vague度，它刻画了元素$u_i$相对Vague集$V$的不确定程度，显然，$0\le\pi_V(u_i)\le 1$。

对Vague集V，当U连续时，有：

$$V=\int_U[t_V(u),1-f_V(u)]/u,u\in U;$$

当U离散时，有：$V=\sum_{i=1}^{n}[t_V(u_i),1-f_V(u_i)]/u_i,u_i\in U$。

2 基于Vague集的不确定多属性决策方法

对于某一不确定多属性决策问题，设$A=\{A_1,A_2\cdots,A_n\}$为决策方案集，称之为论域；$I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$为评价指标（属性）集。用r_{ij}表示方案A_i在评价指标I_j下的测评值，根据测评值，对于任一方案$A_i\in A$，它在单个评价指标$I_j\in I$上或在m个评价指标I_1，I_2，…，I_m上满足决策者要求的程度均可用Vague值来表示。下面我们利用Vague集的相关理论对每个方案进行Vague估计，从而选出最优方案。为了方便，记$N=\{1,2,\cdots,n\}$，$M=\{1,2,\cdots,m\}$。

2.1 确定单指标等级标准

对于任一方案$A_i\in A$，要考虑它在单指标$I_j\in I$上满足决策者要求的程度，必须先确定决策者能够接受的满意值和不满意值的范围，这可用如表1所示的单指标等级标准表和定义1来说明。

表1 单指标等级标准

Table1 Single index grade standard

指标	等级		
	满意	中立	不满意
I_1	$[a_{10},a_{11}]$	$[a_{11},a_{12}]$	$[a_{12},a_{13}]$
I_2	$[a_{20},a_{21}]$	$[a_{21},a_{22}]$	$[a_{22},a_{23}]$
⋮	⋮	⋮	⋮
I_m	$[a_{m0},a_{m1}]$	$[a_{m1},a_{m2}]$	$[a_{m2},a_{m3}]$

定义1 设决策方案A_i在评价指标I_j下的测评值为$r_{ij}(i\in N,j\in M)$，1）如果$r_{ij}\in[a_{j0},a_{j1}]$（决策者能够接受的满意值的范围），则称指标I_j对于方案A_i是满意的，或称方案A_i是支持指标I_j的$(i\in N,j\in M)$；2）如果$r_{ij}\in[a_{j2},a_{j3}]$（决策者能够接受的不满意值的范围），则称指标I_j对于方案A_i是不满意的，或称方案A_i是反对指标I_j的$(i\in N,j\in M)$；3）如果$r_{ij}\in[a_{j1},a_{j2}]$，则称指标I_j对于方案A_i是中立的，或称方案A_i对指标I_j既不支持也不反对$(i\in N,j\in M)$。其中$a_{j0}<a_{j1}<a_{j2}<a_{j3}$或者$a_{j0}>a_{j1}>a_{j2}>a_{j3}$。

2.2 单指标Vague值的确定

设对于任一方案$A_i\in A$，它满足单指标$I_j\in I$的程度用一个Vague值：$\lambda_{A_i}(I_j)=[t_{ij},(1-f_{ij})]$表示，其中$t_{ij}$表示决策方案$A_i$满足单指标$I_j$的程度，$f_{ij}$表示决策方案$A_i$不满足单指标$I_j$的程度，$t_{ij}\in[0,1],f_{ij}\in[0,1],t_{ij}+f_{ij}\le 1,i\in N,j\in M$。通过下面定义的真隶属函数$t_{ij}(x)$、假隶属函数$f_{ij}(x)$，可以确定$A_i$关于$I_j$的单指标Vague值。

定义2 设单指标等级标准如表1，令$b_{jk}=\frac{a_{j(k-1)}+a_{jk}}{2}$（$k$=1，2，3），$d_{jk}=\min(|b_{jk}-a_{jk}|;|b_{j(k+1)}-a_{jk}|)$（$K$=1，2），又设决策方案$A_i$在评价指标$I_j$下的测评值为$x$，定义真隶属函数$t_{ij}(x)$、假隶属函数$f_{ij}(x)$和Vague度函数$\pi_{ij}(x)$如下[9，10]：

当$a_{j0}<a_{j1}<a_{j2}<a_{j3}$时，

$$t_{ij}(x)=\begin{cases}1\ , & x<a_{j1}-d_{j1};\\ \dfrac{|x-a_{j1}-d_{j1}|}{2d_{j1}}, & a_{j1}-d_{j1}\le x\le a_{j1}+d_{j1};\\ 0\ , & x>a_{j1}+d_{j1}。\end{cases}\qquad(1)$$

$$f_{ij}(x)=\begin{cases}1\ , & x>a_{j2}+d_{j2};\\ \dfrac{|x-a_{j2}+d_{j2}|}{2d_{j2}}, & a_{j2}-d_{j2}\le x\le a_{j2}+d_{j2};\\ 0\ , & x<a_{j2}-d_{j2}。\end{cases}\qquad(2)$$

$$\pi_{ij}(x)=\begin{cases}0\ , & r_{ij}<a_{j1}-d_{j1};\\ \dfrac{|r_{ij}-a_{j1}+d_{j1}|}{2d_{j1}}, & a_{j1}-d_{j1}\le r_{ij}\le a_{j1}+d_{j1};\\ 1 & a_{j1}+d_{j1}<r_{ij}<a_{j1}-d_{j1};\\ \dfrac{|r_{ij}-a_{j2}-d_{j2}|}{2d_{j2}}, & a_{j2}-d_{j2}\le r_{ij}\le a_{j2}+d_{j2};\\ 0\ , & r_{ij}>a_{j2}+d_{j2}。\end{cases}\qquad(3)$$

当$a_{j0}>a_{j1}>a_{j2}>a_{j3}$时，

$$t_{ij}(x)=\begin{cases}1\ , & x>a_{j1}+d_{j1};\\ \dfrac{|x-a_{j1}+d_{j1}|}{2d_{j1}}, & a_{j1}-d_{j1}\le x\le a_{j1}+d_{j1};\\ 0\ , & x<a_{j1}-d_{j1}。\end{cases}\qquad(4)$$

$$f_{ij}(x)=\begin{cases}1\ , & x<a_{j2}-d_{j2};\\ \dfrac{|x-a_{j2}-d_{j2}|}{2d_{j2}}, & a_{j2}-d_{j2}\le x\le a_{j2}+d_{j2};\\ 0\ , & x>a_{j2}+d_{j2}。\end{cases}\qquad(5)$$

$$\pi_{ij}(x)=\begin{cases}0\ , & r_{ij}<a_{j1}-d_{j1};\\ \dfrac{\left|r_{ij}-a_{j1}-d_{j1}\right|}{2d_{j1}}, & a_{j1}-d_{j1}\le r_{ij}\le a_{j1}+d_{j1};\\ 1 & a_{j1}+d_{j1}<r_{ij}<a_{j1}-d_{j1};\\ \dfrac{\left|r_{ij}-a_{j2}+d_{j2}\right|}{2d_{j2}}, & a_{j2}-d_{j2}\le r_{ij}\le a_{j2}+d_{j2};\\ 0\ , & r_{ij}>a_{j2}+d_{j2}。\end{cases}\qquad(6)$$

显然，满足 $t_{ij}(x)\in[0,1]$，$f_{ij}(x)\in[0,1]$，$\pi_{ij}(x)\in[0,1]$，$t_{ij}(x)+f_{ij}(x)+\pi_{ij}(x)=1$，　$i\in N, j\in M$。

2.3　多指标综合 Vague 值的确定

根据式(1)~(6)计算得到每个方案的单指标Vague值后，决策方案 A_i 满足评价指标 I_1，I_2，…，I_m 的程度可用Vague集表示如下：

$A_i=\{(I_1,[t_{i1},(1-f_{i1})]),(I_2,[t_{i2},(1-f_{i2})]),\cdots,(I_m,[t_{im},(1-f_{im})])\}$。

式中，t_{ij} 表示决策方案 A_i 满足评价指标 I_j 的程度，f_{ij} 表示决策方案 A_i 不满足评价指标 I_j 的程度。$t_{ij}\in[0,1]$，$f_{ij}\in[0,1]$，$t_{ij}+f_{ij}\le 1$，$i\in N, j\in M$。假定评价指标 I_1，I_2，…，I_m 的权重向量为 $\boldsymbol{W}=(w_1，w_2，\cdots，w_n)$，其中 $w_j\in[0,1]$为指标 I_j 的权，且满足$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$。经加权计算，可得到方案 A_i 的多指标综合 Vague 值：

$$\lambda_{A_i}=\left[\sum_{j=1}^{m}w_j t_{ij},\left(1-\sum_{j=1}^{m}w_j f_{ij}\right)\right]=\left[t_{A_i},1-f_{A_i}\right],\qquad(7)$$

显然有$t_{A_i}\in[0,1]$，$f_{A_i}\in[0,1]$，$t_{A_i}+f_{A_i}\le 1$。令 $\pi_{Ai}=1-t_{Ai}-f_{Ai}$，可知$\pi_{A_i}=\sum_{j=1}^{m}w_j\pi_{ij}$，表示方案 A_i 满足评价指标集 I 的不确定性程度。

2.4　定义排序准则和择优

设方案 A_i 的多指标综合 Vague 值为 $\lambda_{Ai}=[t_{Ai},1-f_{Ai}]$，这里$t_{A_i}\in[0,1]$，$f_{A_i}\in[0,1]$，$t_{A_i}+f_{A_i}\le 1$，下面定义两个排序准则来度量方案对于决策者要求的适合程度，从而选出最优方案。

准则1：记分准则　定义记分函数[7] $\Delta(A_i)$为：

$$\Delta(A_i)=t_{A_i}+t_{A_i}(1-t_{A_i}-f_{A_i})。\qquad(8)$$

可以根据这个记分函数对方案 $A_i(i\in N)$进行排序并择优，$\Delta(A_i)$的值越大，表示方案A_i越满足决策者的要求，其中取值最大者所对应的方案便是最优方案。

准则2：C_i准则　定义 C_i 为：$C_i=\dfrac{t_{A_i}}{t_{A_i}+f_{A_i}}$。　(9)

可根据 C_i 的值对方案 $A_i(i\in N)$进行排序并择优，C_i 的值越大，表示方案 A_i 越优。

准则1来源于文献[7]，已验证其有效性。准则2类似于确定性多属性决策问题中的TOPSIS方法。TOPSIS法是Hwang，Yoon在1981年提出的[11]，是逼近理想解的排序方法(Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution 的缩写)，现已获得了广泛应用。所谓理想解 PIS(Positive Ideal Solution)是一个方案集中的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好的值；负理想解NIS(Negative Ideal Solution)则是方案集中的最差方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最差的值。TOPSIS认为一个满意解应该距离理想解最近且距离负理想解最远，首先利用各方案 B_k $(k\in N)$到绝对理想解的距离 d_k^+ 和到负理想解的距离 d_k^- 计算综合评价指数 $C_k(k\in N)$，然后根据 C_k 对方案进行排序和选优，C_k 越大，则方案越优。C_k 的计算公式为：

$$C_k=\frac{d_k^-}{d_k^++d_k^-},\ k\in N。\qquad(10)$$

根据 t_{Ai}，f_{Ai} 的含义，式（9）和式（10）有异曲同工之妙，故利用 C_i 的值对方案 $A_i(i\in N)$进行排序并择优具有合理性。

3　实例分析

我们考虑自然科学学术期刊综合评优的问题[12]。设论域A={自然科学学术期刊$A_i(i=1,2,\cdots,n)$}，属性空间F={期刊质量}，对每一学术期刊样品，要测量12个评价指标：I_1—影响因子，I_2—被引频次，I_3—应映速率，I_4—平均引文率，I_5—期刊他引率，I_6—基金资助项目论文比例，I_7—国际著者论文比例数，I_8—论文机构分布数，I_9—国际著名检索系统收录比例数，I_{10}—国内重要检索系统收录比例数，I_{11}—影响因子平均增长率，I_{12}—稳定指数。12个指标的权重由专家评定为 $\boldsymbol{W}$=(0.13，0.10，0.06，0.07，0.08，0.07，0.06，0.05，0.11，0.11，0.09，0.07)，学术期刊单指标等级标准见表2。

表2　自然科学学术期刊单指标等级标准

Table 2　Single index grade standard of natural science academic journals

等级标准	指标											
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}
满　意	1~1.5	2 000~3 000	0.5~1	5~7	0.8~1	0.8~1	0.8~1	0.8~1	0.8~1	0.8~1	0.1~1	0~0.1
中　立	0.5~1	1 000~2 000	0.25~0.5	3~5	0.6~0.8	0.6~0.8	0.5~0.8	0.5~0.8	0.5~0.8	0.5~0.8	0.05~0.1	0.1~0.3
不满意	0~0.5	0~1 000	0~0.25	0~3	0~0.6	0~0.6	0~0.5	0~0.5	0~0.5	0~0.5	0~0.05	0.3~1

现有4种自然科学学术期刊样本A_1，A_2，A_3，A_4，测得它们的12个指标值见表3。

表3 4种期刊样本的指标值

Table 3 Index value of four sample journals

样本	指标											
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}
A_1	1.1	2 300	0.3	7	0.65	0.7	0.8	0.5	0.7	0.53	0.2	0.1
A_2	1.15	2 100	0.6	5	0.6	0.8	0.6	0.85	0.8	0.7	0.12	0.13
A_3	1.2	2 200	0.4	6	0.9	0.8	0.7	0.6	0.9	0.9	0.1	0.2
A_4	1.05	2 400	0.3	8	0.8	0.6	0.55	0.75	0.7	0.6	0.11	0.25

现在要根据自然科学学术期刊样本A_1，A_2，A_3，A_4的测评值对它们进行排序，并评出最优期刊。

Step 1 根据式(1)~(6)计算各期刊的单指标Vague值。先按照学术期刊单指标等级标准表，计算$b_{jk}(j=1,2,\cdots,12, k=1,2,3)$，然后求出$d_{jk}(j=1,2,\cdots,12, k=1,2)$，再按照式(1)~(6)构造计算单指标Vague值的真隶属函数$t_{ij}(x)$、假隶属函数$f_{ij}(x)$ $(i=1,2,3,4;\ j=1,2,\cdots,12)$，从而可通过计算得到各期刊$A_i(i=1,2,3,4)$的Vague集（本文从略）。

Step 2 根据式(7)计算得到方案$A_i(i=1,2,3,4)$的多指标综合Vague值。

$\mu_{A_1}=[0.396\,0, 0.893\,0]$，$\mu_{A_2}=[0.475\,5, 0.949\,8]$，$\mu_{A_3}=[0.573\,0, 0.991\,5]$，$\mu_{A_4}=[0.353\,5, 0.891\,0]$。

Step 3 根据式(8)和(9)，计算方案$A_i(i=1,2,3,4)$的$\Delta(A_i)$和C_i的值，并进行排序，结果如表4所示。

表4 计算结果表

Table 4 Computing results table

准则	期刊				排序结果
	A_1	A_2	A_3	A_4	
$\Delta(A_i)$	0.592 8	0.701 0	0.812 8	0.543 5	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
C_i	0.787 3	0.904 5	0.985 4	0.764 3	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

排序结果均为：$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$，故最优自然科学学术期刊为$A_3$。

4 结束语

本文提出了一种基于Vague集的不确定多属性决策方法。该方法首先确定决策者在单指标上的满意值和不满意值的范围，并通过定义单指标的Vague集真、假隶属函数计算每个方案的单指标Vague值，避免了决策者的主观任意性；利用加权算术平均算子替代“取大取小”的评价函数$E(A_i)$[4-7]计算方案的多指标综合Vague值，避免了信息的丢失。给出的两个排序准则，其意义直观，表达简洁；最后，用一个算例说明了该方法的有效性。本文的方法有如下优点：1）计算简便。所有的计算都是代数运算，便于在计算机上完成；2）排序准则合理，排序有效。本文的方法为Vague集理论渗透于更多的应用领域开拓了一条新的思路，为解决不确定多属性决策问题提供了一种有效、实用的方法。

参考文献：

[1] Gau W L，Buehrer D J. Vague sets [J]. IEEE Trans Syst Man Cybern，1993，23(2)：610-614.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and control，1965，8：338-356.

[3] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20(1)：87-96.

[4] Chen S M，Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. Fuzzy Sets and Systems，1994，67(2)：163-172.

[5] Hong D H，Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，114：103-113.

[6] 李 凡，卢 安，蔡立晶. 基于Vague集的多目标模糊决策方法[J]. 华中科技大学学报：自然科学版，2001，29(7)：1-3.

[7] 刘华文. 多目标模糊决策的Vague集方法[J]. 系统工程理论与实践，2004(5)：103-109.

[8] 林志贵，徐立中，刘英平. Vague集理论及其在模糊信息处理中的应用[J]. 信息与控制，2005，34(1)：54-59.

[9] 程乾生. 属性数学——属性测度和属性统计[J]. 数学的实践与认识，1998，28(2)：97-107.

[10] 程乾生. 质量评价的属性数学模型和模糊数学模型[J]. 数理统计与管理，1997，16(6)：18-23.

[11] Hwang C L，Yoon K. Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications[M]. New York：Springer-Verlag，1981.

[12] 李 群，宁 利. 属性区间识别理论模型研究及应用[J]. 数学的实践与认识，2002，32(1)：50-54.