

单级倒立摆系统控制方法设计

彭自然, 罗大庸, 张航

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 倒立摆系统以其自身的不稳定性为系统的平衡提出了难题, 也因此成为自动控制实验中验证控制算法优劣的极好的实验装置。通过比较分析遗传算法与自适应神经模糊推理系统两种不同方法在倒立摆控制系统中的应用, 并实验证实: 使用基于 ANFIS 倒立摆系统计算量小, 收敛快, 但是其鲁棒性却不如基于遗传算法所设计的控制其好; 遗传算法求解问题的效率高, 且随着问题规模的扩大, 优势更为突出。

关键词: 遗传算法; 自适应神经模糊推理系统; 控制系统

中图分类号: O175

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2007)02-0053-05

Design and Realization of Single Inverted-Pendulum Control System

Peng Ziran, Lou Dayong, Zhang Hang

(College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Inverted-pendulum system is difficult to control because of its instability. Aiming at the control strategy in automatic control experiments, it approves that on the basis of ANFIS, the single inverted-pendulum control shows the algorithm is veracious and its convergence is faster than other one which based on genetic algorithm between the different methods through the analyses. Genetic algorithm has a better efficiency and has more superiority in scale expanding.

Key words: genetic algorithm; ANFIS; control system

0 前言

单级倒立摆是一种典型的多变量、非线性、强耦合的不稳定系统, 对它的研究可归结为对多变量非线性系统的研究, 具有一定的理论价值^[1]。从工程应用上讲, 卫星的姿态控制、机器人的关节运动控制和起重机械的稳钩装置等都和倒立摆模型有相似之处^[2]。所以, 对倒立摆系统的控制研究具有重要的工程背景和实际意义。

在某机械臂的设计过程中, 将机械臂当作一个倒立摆来分析。通过比较两种方法在倒立摆控制系统中的应用, 得出了最适用于本系统的一种方法。

1 倒立摆控制系统的数学模型

图1是单级平衡倒立摆系统的力学示意图。

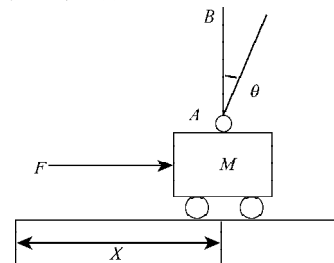


图1 单级平衡倒立摆系统的力学示意图

Fig. 1 The force view of the single inverted-pendulum system

将摆杆视为刚体, 则单级倒立摆系统的参数为:

收稿日期: 2007-01-25

作者简介: 彭自然(1969-), 男, 湖南益阳人, 中南大学信息科学与工程学院硕士研究生, 研究方向为分布式计算, 仿真技术; 罗大庸(1944-), 男, 湖南长沙人, 中南大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为图像处理, 综合智能控制。

小车质量 M ，摆杆质量 m ，摆杆重心到铰链的长度 l ，重力加速度 g ，小车位置 x ，摆杆角度 θ ，作用在小车上的驱动力 F 。当小车在水平方向运动时，若忽略摩擦力矩的非线性，则根据牛顿第二定律得：

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g \sin \theta - (F + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta}{\frac{4}{3}(M+m)l - ml \cos^2 \theta} \\ \ddot{x} = \frac{F + ml(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta)}{M+m} \end{cases} \quad (1)$$

考虑到摆杆在平衡点 ($\theta=0$) 附近做微小摆动，对式(1)进行局部线性化，即用 $\cos \theta \approx 1$ ， $\sin \theta \approx \theta$ 做近似处理后可得倒立摆的状态方程式：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2)$$

式中： $u = F$ ；

$$x = y = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} & x & \dot{x} \end{bmatrix}^T; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m(m+M)gl}{(M+m)l + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2gl^2}{(M+m)l + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{(M+m)l + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{I + ml^2}{(M+m)l + Mml^2} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^o$$

在某机械臂的设计过程中，选取参数：小车质量 $M=1.32 \text{ kg}$ ，摆杆质量 $m=0.07 \text{ kg}$ ，摆杆转动轴心到杆重心的长度 $l=0.2 \text{ m}$ ，重力加速度 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ ，则倒立摆的状态方程为^[3,4]：

$$\ddot{\theta} - 38.193\theta + 6.365\dot{\theta}^3 + 0.039\theta\dot{\theta}^2 + 0.039\theta^2\ddot{\theta} + 2.804u - 1.402\theta^2u = 0, \quad (3)$$

这个回路相应的线性系统方程是：

$$\ddot{\theta} - 38.193\theta + 2.804u = 0,$$

再进行拉式变换，则线性传递函数为：

$$\hat{P}_1(s) = \frac{-2.804}{s^2 - 38.193} \quad (4)$$

从式(4)可以看出：倒立摆系统回路有两个极点，其中1个在 S 右半平面上。因此，倒立摆是一个不稳定系统。

2 遗传算法在倒立摆控制中的应用分析

遗传算法 (Genetic Algorithm) 是美国密歇根大学 Holland 教授倡导发展起来的，是模拟生物学中的自然遗传和达尔文进化理论而提出的并行随机优化算法^[5,6]，其基本思想是：随着时间的更替，只是最合适的物种才得以进化。遗传算法利用全局搜索技术，通过对决策空间的一个集合施行选择、交叉、变异等一系列遗传操作，产生一个新的集合，通过循环操作，不断产生新集合，并使得新的集合包含接近最优解的编码。

文献[6]指出：遗传算法在求解优化问题时需要定义一个适应度函数，并把待求解问题的可行解编码为由一个编码串表示的个体，使得适应度最大的个体对应于待求解问题的最优解。这样，只要找到可适应度最大的个体，也就得到了问题的最优解。

2.1 倒立摆系统非线性 H_∞ 控制器的设计

图2为自动平衡倒立摆系统结构所示的 SISO 非线性控制系统， P 为被控对象， W 为加权函数 (滤波器)， C 为待设计的非线性 H_∞ 控制器， $u \in R^1$ 为输入信号， $y \in R^1$ 为输出信号， $v \in R^1$ 为干扰信号。

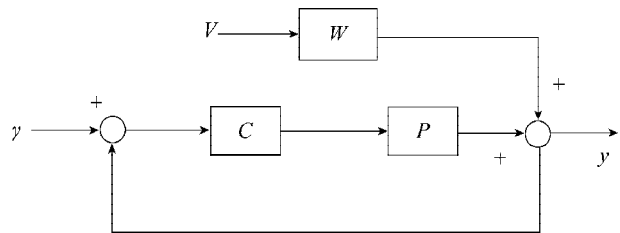


图2 自动平衡倒立摆系统结构图

Fig. 2 The structure of single inverted-pendulum system

H_∞ 控制器设计思想是：找到一个 C ，使系统为 FDBIBO 稳定，且使由输入 v 产生的输出 y 的能量为最小。这个回路相应的线性传递函数为：

$$\hat{P}_1(s) = \frac{-2.804}{s^2 - 38.193} \quad (5)$$

从式(5)可看出，这个回路有2个极点，其中1个在 S 右半平面。因此，倒立摆是一个自不稳定系统，倒立摆车加上滑轮、伺服电机、功率放大器和控制器，组成的自动平衡倒立摆系统。如果运动位移无限长，即让倒立摆在圆轨道上运动，可以不考虑位移 R

的作用, 而只考虑摆角 θ 的回路。对系统的非线性方程 (3) 进行分析可知: P 不是 FDBIBO 稳定的。故, 应先设计一个线性控制器 C , 使 P 镇定 (即 FDBIBO 稳定)。

根据文献[3]的设计方法, 可以得到本系统中的非线性控制器为 $C = \hat{q} \circ (I - p \circ \hat{q})^{-1}$, 其中

$$q(s) = \frac{0.000\ 3s^6 + 0.003s^5 + 0.016\ 5s^4 +}{0.001s^6 + 0.015\ 6s^5 + 0.120\ 5s^4 +} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{0.066\ 8s^3 + 0.181s^2 + 0.261\ 8s + 0.1489}{0.513\ 4s^3 + 1.207\ 9s^2 + 1.462\ 8s + 0.711\ 1}$$

$$(s_1, s_2, s_3) = -\frac{2.804^2 \times}{(s_1 + s_2 + s_3)^2 -} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{(1.402s_3^2 - 35.699)}{38.193(s_1^2 - 38.193)(s_2^2 - 38.193)(s_3^2 - 38.193)} \circ$$

2.2 系统仿真分析

在白噪声信号的干扰下, 控制参考输入信号为方波信号, $u(t) = \sin(t)$ 系统输出响应图分别为图 3、4。

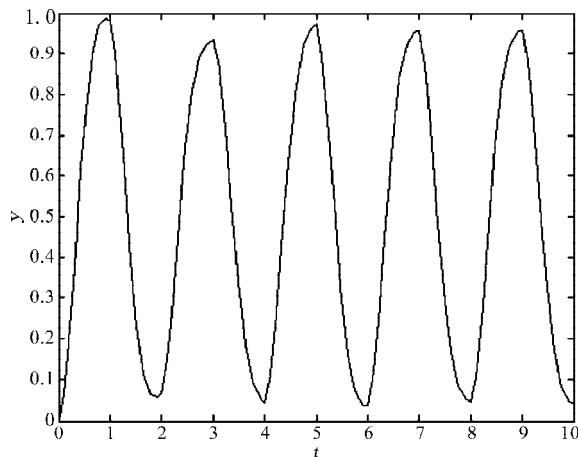


图 3 方波响应图

Fig. 3 Impulse response of square wave

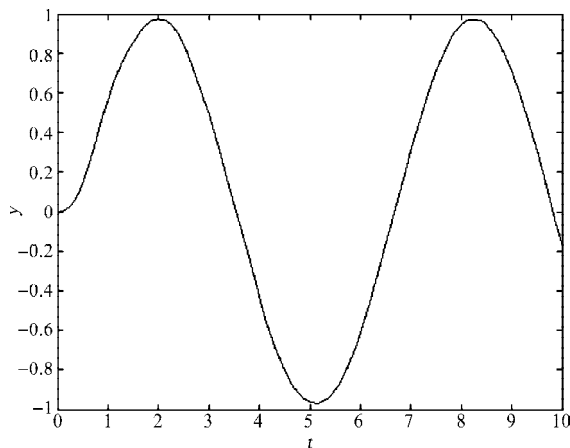


图 4 $u(t) = \sin(t)$ 响应图

Fig. 4 Impulse response of $u(t) = \sin(t)$

由图 3、4 可知, 此设计方法具有较好的抗干扰特性, 且满足系统的性能指标, 因此, 所设计的状态反馈 H_∞ 最优控制器是有效和可行的。

3 自适应神经模糊推理系统在倒立摆控制中的应用分析

自适应神经模糊推理系统 (ANFIS) 方法基于 Sugeno 模糊模型, 采用类似于神经网络的结构, 用反向传播算法和最小二乘法调整模糊推理系统的隶属度函数参数, 并能自动产生模糊规则, 以解决模糊推理系统中隶属度函数确定的随意性和模糊规则提取难的问题, 是一种多输入单输出系统。文献[7]指出: 其既具有模糊控制不要求掌握被控对象精确模型及强鲁棒性的优点, 又具有神经网络自学习的优点。

对 2 个输入 x 和 y 、1 个输出 f 的系统, 用具有 2 个模糊规则的一阶 Sugeno 模糊模型表达, 模糊规则为:

规则 1:

If x is A_1 and y is B_1 Then $f_1 = p_1x + q_1y + c_1$;

规则 2:

If x is A_2 and y is B_2 Then $f_2 = p_2x + q_2y + c_2$;

其中 A_i 、 B_i 为输入变量的模糊集合, 隶属度函数为 $\mu_{A_i}(x)$, $\mu_{B_i}(y)$, ($i = 1, 2$)。

与该一阶 Sugeno 模型等价的 ANFIS 结构如图 5 所示。

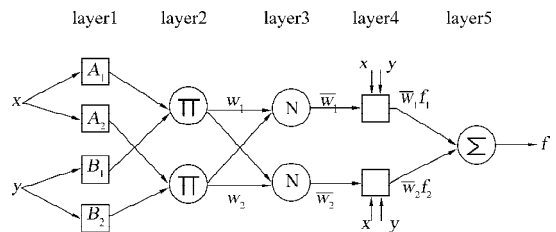


图 5 ANFIS 结构图

Fig. 5 The structure of ANFIS

ANFIS 的结构由 5 层组成, 每层节点具有相同的函数类型, 其中方形节点为自适应节点, 需要进行参数调整, 圆形节点为固定节点, 设第 j 层第 i 个节点的输出为 O_i^j 。

第 1 层: 节点是自适应节点, 它的输出获得输入的隶属度, 隶属度函数是参数化的, 该参数集 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 为前提参数。

第 2 层: 节点是乘法器, 产生激发强度 w_1 和 w_2 , $w_i = \mu_{A_i}(x) \mu_{B_i}(y)$, $i = 1, 2$ 。

第 3 层: 将激发强度 w_1 和 w_2 归一化处理, 得 $\bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}$, $i = 1, 2$ 。

第 4 层: 节点是自适应节点, 第 i 个节点输出:

$$O_i^4 = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (p_i x + q_i y + r_i), \quad i=1, 2。$$

参数集 $\{p_i, q_i, r_i\}$ 为结论参数, 结论参数的个数为 $n+1$ (n 为输入变量的个数)。

第 5 层: 计算所有输入信号之和作为系统输出:

$$f = O_1^5 = \sum_{i=1,2} \bar{w}_i f_i = \sum_i \bar{w}_i (p_i x + q_i y + r_i) = (\bar{w}_1 x) p_1 + (\bar{w}_1 y) q_1 + (\bar{w}_1) r_1 + (\bar{w}_2 x) p_2 + (\bar{w}_2 y) q_2 + (\bar{w}_2) r_2$$

ANFIS 系统中的自适应节点参数通过对给定的输入输出数据集进行学习调整, 通常采用一种混合学习算法。首先, 确定前提参数 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 的初始值, 用最小二乘法调整结论参数 $\{p_i, q_i, r_i\}$, 然后采用反向传播算法更新前提参数。

3.1 基于 ANFIS 的倒立摆控制器设计

设计单级倒立摆系统的初始状态取为 $x_0 = [-0.174 \ 5 \ 0 \ 0.2 \ 0]$ 。

根据文献[7]的设计思想, 单级平面倒立摆的控制指标为: 摆角 θ 、摆速 $\dot{\theta}$ 、小车位置 x 和小车速度 \dot{x} , 系统的数学模型以状态方程表示, 表达式为式 (2)。输入变量为小车的驱动力 F , 状态变量 $\mathbf{X} = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$, 系统输出 $\mathbf{Y} = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$, 将输出变量 x 与设定目标位置信号相比较, 差值作为控制器的输入信号。系统原理框图如图 6 所示, 控制目标为通过驱动小车的移动, 在平衡倒立摆的同时跟踪目标位置。

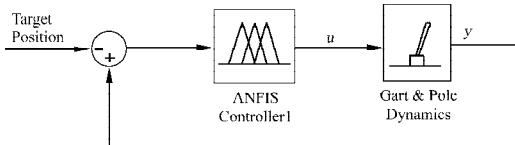


图 6 倒立摆控制系统原理框图

Fig. 6 The control theory of the single inverted-pendulum system

系统中 ANFIS 控制器为四输入单输出系统, 每个输入变量对应 2 个钟形隶属度函数

$$\mu_{A_i}(x) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{x - c_i}{a_i} \right)^2 \right]^{b_i}}$$

入空间被划分为 16 个区域, 共有 16 条模糊规则, ANFIS 结构图如图 7 所示。

基于线性二次型最优设计方法得到线性二次最优状态调节器 (LQR), 从 LQR 调节器作用于单级倒立摆系统时得到的输入输出数据中选取 2 000 组作为样本数据, 来训练所设计的 ANFIS 控制器, 其中 LQR 调节器的加权矩阵 Q 和 R 分别为:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [0.1]。$$

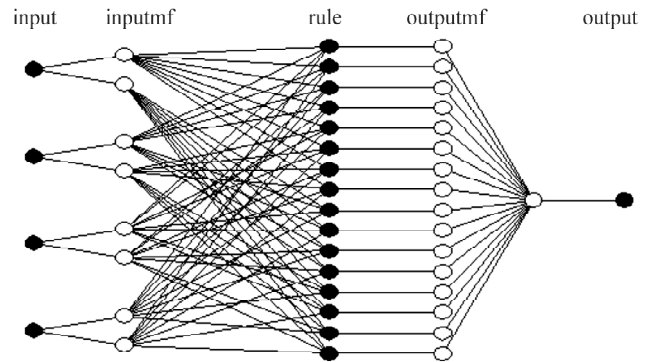


图 7 倒立摆系统 ANFIS 控制器结构图

Fig. 7 The structure of inverted-pendulum system controller

3.2 系统仿真分析

本文用 Matlab/ Simulink 软件搭建基于 ANFIS 控制器的单级倒立摆系统仿真模型如图 8 所示。^[8]

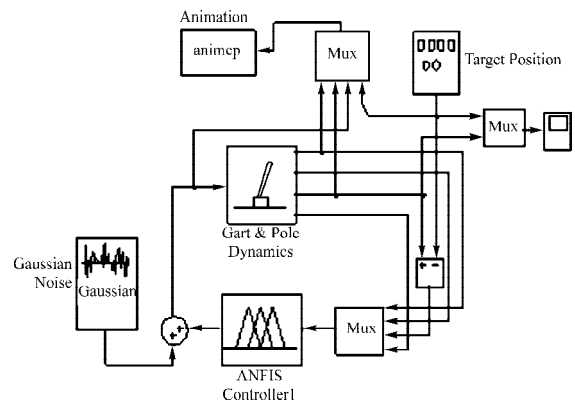


图 8 倒立摆控制系统仿真模型图

Fig. 8 The stimulation model of inverted-pendulum system

倒立摆仿真模型分别采用式 (1) 非线性模型和式 (2) 线性状态方程进行仿真, 目标位置信号为方波信号, 幅值为 1, 周期 $T = 10 \text{ s}$, 加入的干扰信号为 1 dBW 的白噪声信号。

系统的初始状态 $x_0 = [-0.174 \ 5 \ 0 \ 0.2 \ 0]$ 。

从仿真曲线图 9、图 10 上可以看出, 基于 ANFIS 控制器的倒立摆系统在保证摆角较小 (小于 $\pm 10^\circ$) 的前提下, 可以较好地控制倒立摆跟踪目标位置信号, 且响应速度较快, 超调量较小。文献[8]指出: 由于 ANFIS 控制器采用 Sugeno 模型, 由多个局部映

射组合而成, 算法简单, 且每个局部映射的参数采用线性最小二乘法进行调整, 这使得它的收敛速度较快, 在计算时不需要进行大量的矩阵运算, 因而适合于实时控制的情况。

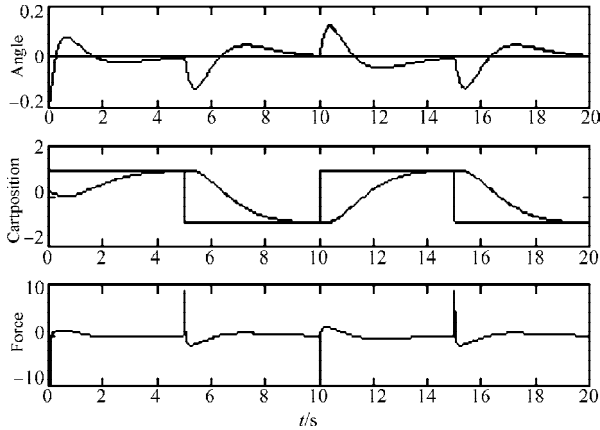


图9 线性模型动态响应图(无干扰)
Fig. 9 The view of the linear model
with dynamic response

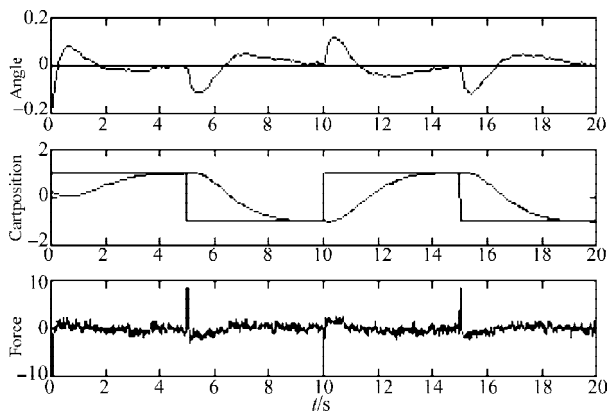


图10 线性模型动态响应图(加入白噪声)
Fig. 10 The view of the nonlinear model
with dynamic response

4 结论

基于 ANFIS 控制器的倒立摆系统, 由于其计算量小, 能较快收敛, 因此, 适合在微控制器计算能力较差的场合使用, 但是其鲁棒性不如基于遗传算法所设计的控制器好。遗传算法要求较大的计算量, 适合于微控制器计算能力较强的场合。

参考文献:

- [1] Biling S A, Tsang K M. Spectral analysis for nonlinear systems.Part: Interpretation of nonlinear frequency response function[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1989, 3 (4): 341-359.
- [2] Zhang H, Billings S A. Analysing the transfer function of nonlinear systems in the frequency domain[J]. J.Mechanism Systems and Signal Processing, 1993, 7 (5): 531-550.
- [3] 曹建福, 韩崇昭, 方洋旺. 非线性控制理论及应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [4] Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems [M]. Massachusetts: MIT Press, 1975.
- [5] 陈国良, 王煦法, 庄镇泉, 等. 遗传算法及其应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.
- [6] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [7] Jang J S R. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23 (3): 665-685.
- [8] 黄文梅. 系统分析仿真分析与设计——MATLAB 语言工程应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.
- [9] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析——MATLAB 语言应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [10] 刘金琨. 先进 PID 控制及其 MATLAB 仿真[M]. 北京: 科学出版社, 2001.